

Σχεδιασμοί Πειραμάτων: Κατασκευές και Εφαρμογές

Χ. Ευαγγελάρας

*Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Πανεπιστήμιο Πειραιώς*

1

Σχεδιασμοί Αποκριτικών Επιφανειών

Response Surface Methodology (RSM)

2

Μεθοδολογία αποκριτικών επιφανειών

Η μεθοδολογία των επιφανειών απόκρισης χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της σχέσης μεταξύ της απόκρισης που μελετάται και των ποσοτικών παραγόντων που εξετάζονται.

Χρησιμοποιούνται όταν αναζητείται ο «βέλτιστος» συνδυασμός των τιμών των παραγόντων (ενδέχεται να είναι κάποιος που δεν έχει επιλεγεί ως θεραπεία στο πείραμα).

Συνήθως εφαρμόζεται αφού έχει προηγηθεί κάποιο **πείραμα κρησαρίσματος** και έχουν εντοπιστεί οι σημαντικοί παράγοντες (ο πειραματισμός δηλαδή γίνεται σε διαδοχικές φάσεις).

Επομένως το άμεσο ζητούμενο δεν είναι η σημαντικότητα των παραγόντων, αλλά το σχήμα της επιφάνειας απόκρισης.

3

Συνήθως γίνεται προσαρμογή του γραμμικού μοντέλου 2ης τάξης:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

όπου η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται με τη χρήση της γραμμικής πολλαπλής παλινδρόμησης.

Για να γίνει αυτό όμως, είναι απαραίτητο οι παράγοντες να μελετώνται σε τουλάχιστον 3 επίπεδα ο καθένας.

Όταν γίνει η προσαρμογή του μοντέλου, ψάχνουμε να βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να ρυθμιστούν οι παράγοντες, ώστε να βελτιστοποιηθεί η απόκριση.

4

Η εύρεση των βέλτιστων ρυθμίσεων των παραγόντων μπορεί να γίνει με τη χρήση γραφημάτων, γνωστών και ως **γραφήματα περιφερεικών απεικονίσεων (contour plots)**

ή εναλλακτικά,

με την απευθείας χρήση της εξίσωσης της επιφάνειας απόκρισης που έχει εκτιμηθεί από τα δεδομένα.

Η βέλτιστη αυτή συνθήκη, τέλος, επιβιβαιώνεται με νέες παρατηρήσεις που λαμβάνονται στο σημείο αυτό.

5

Μετά την προσαρμογή του μοντέλου 2^{ης} τάξης, συνήθως καταλήγουμε στη χρήση είτε:

(1) του μοντέλου των γραμμικών επιδράσεων μόνο

$$\hat{Y} = \widehat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^k \widehat{\beta}_i x_i$$

ή (2) του μοντέλου των γραμμικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων

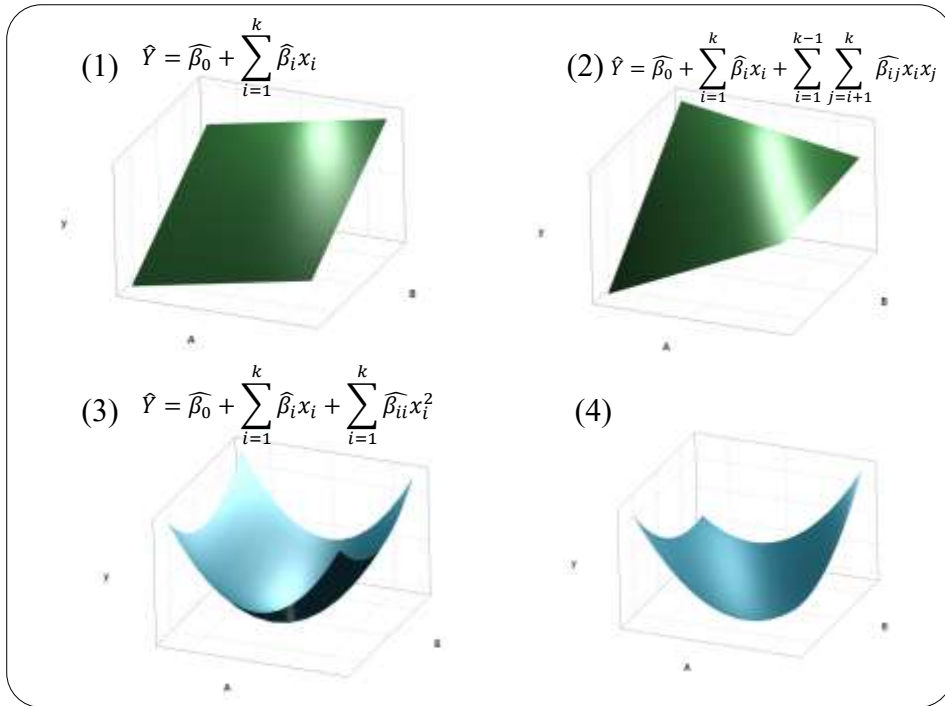
$$\hat{Y} = \widehat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^k \widehat{\beta}_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \widehat{\beta}_{ij} x_i x_j$$

ή (3) του μοντέλου των γραμμικών και τετραγωνικών επιδράσεων

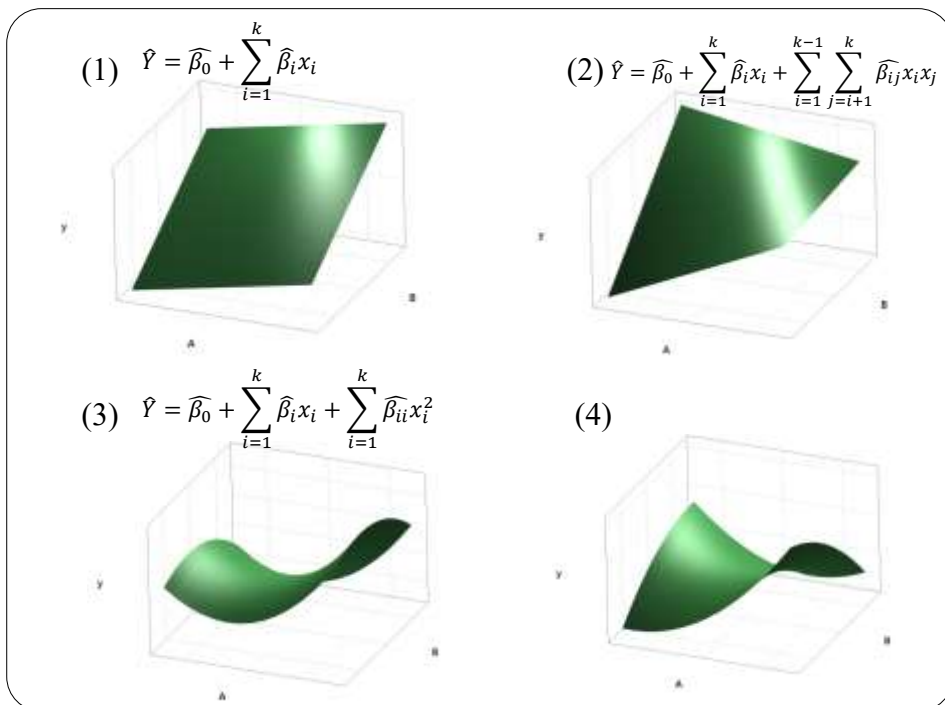
$$\hat{Y} = \widehat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^k \widehat{\beta}_i x_i + \sum_{i=1}^k \widehat{\beta}_{ii} x_i^2$$

ή (4) του πλήρους μοντέλου 2^{ης} τάξης.

6



7



8

Οι ειδικοί σχεδιασμοί αποκριτικών επιφανειών

Έχουν σίγουρα 3 επίπεδα σε κάθε (ποσοτικό) παράγοντα:

Το χαμηλό (-1),
το μεσαίο (0) και
το υψηλό ($+1$).

Το γεγονός αυτό επιτρέπει την **εκτίμηση των τετραγωνικών επιδράσεων**.

Τα επίπεδα διατηρούν την έννοια της «απόστασης», δηλαδή όσο απέχει το χαμηλό από το μεσαίο, τόσο θα απέχει και το μεσαίο από το υψηλό.

Τα επίπεδα επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να αναφέρομαστε στην «περιοχή» που θέλουμε να μελετήσουμε.

Οι πιο δημοφιλείς σχεδιασμοί είναι οι:

- **Κεντρικά συνδυασμένοι σχεδιασμοί** (GEP Box and KB Wilson, JRSS B, 1951)
- **Σχεδιασμοί Box-Behnken** (GEP Box and DW Behnken, Technometrics 1960)
- **Ορθογώνιοι σχηματισμοί τριών επιπέδων**

9

Οι ειδικοί σχεδιασμοί αποκριτικών επιφανειών

Οι σχεδιασμοί αυτοί έχουν πολύ ωραίες ιδιότητες:

- Ο πίνακας πληροφορίας του γραμμικού μοντέλου (1) είναι διαγώνιος.
- Οι σχεδιασμοί είναι «περιστρέψιμοι» (rotatable) [ή σχεδόν περιστρέψιμοι]. Αυτό σημαίνει ότι η διακύμανση της εκτίμησης της απόκρισης σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου ελέγχου εξαρτάται μόνο από την απόσταση του σημείου αυτού από το «κέντρο» του χώρου πειραματισμού.

Το «κέντρο» του χώρου πειραματισμού, γνωστό και ως «κεντρικό σημείο» είναι το σημείο αυτό (συνδυασμός επιπέδων των παραγόντων) που όλοι οι παράγοντες μελετώνται στο μεσαίο επίπεδό τους (0).

10

Οι κεντρικά συνδυασμένοι σχεδιασμοί

Central Composite Designs (CCD)

11

Δημιουργούνται εύκολα για οποιοδήποτε πλήθος παραγόντων, k . Χρησιμοποιούνται 3 «είδη» θεραπειών, γι' αυτό και το composite:

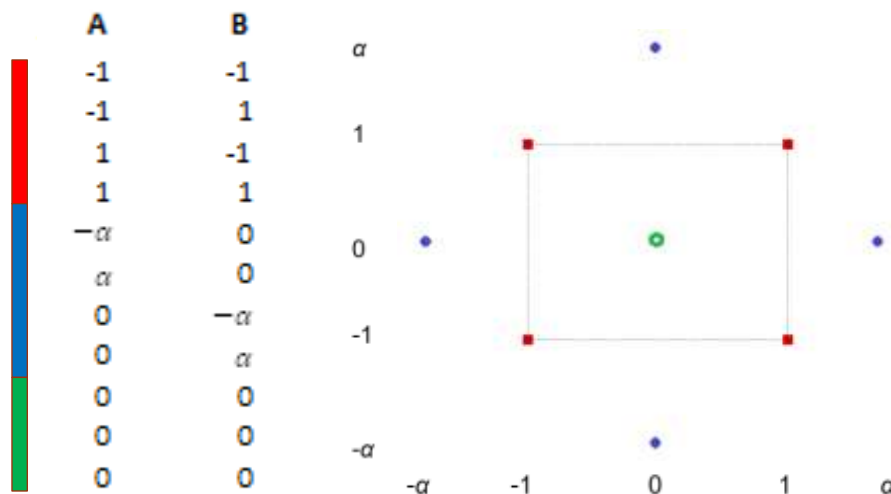
- Το παραγοντικό μέρος, όπου συνήθως χρησιμοποιείται ο πλήρης 2^k παραγοντικός σχεδιασμός
- Το μέρος με τα κεντρικά σημεία και
- Το μέρος με τα σημεία αστέρος. Τα σημεία αστέρος είναι σημεία σε απόσταση α από το κεντρικό σημείο.

Τα κεντρικά σημεία και τα σημεία αστέρος επιτρέπουν την εκτίμηση των τετραγωνικών επιδράσεων.

Η χρήση τους ενδείκνυται για εξακολουθητικό πειραματισμό, καθώς μπορούν να ενσωματώσουν πληροφορίες σε ένα σωστά σχεδιασμένο αρχικό παραγοντικό πείραμα (κρησάρισμα).

12

Παράδειγμα Ο CCD για δύο παράγοντες



13

Συνήθως 3 – 6 κεντρικά σημεία είναι αρκετά.

Η επιλογή του α για τα σημεία αστέρος είναι και αυτή που κάνει το σχεδιασμό περιστρέψιμο. Η τέταρτη ρίζα του πλήθους των θεραπειών του παραγοντικού μέρους είναι η συνήθης επιλογή.

Προφανώς, ο σχεδιασμός αυτός στη γενική του μορφή έχει 5 επίπεδα ανά παράγοντα. Αν το $\alpha = 1$, τότε έχει τρία επίπεδα.

Για το παραγοντικό μέρος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός (απλός ή σύνθετος). Τέτοιες επιλογές οδηγούν στη δημιουργία των **small central composite designs** οι οποίοι προσφέρουν οικονομία στις εκτελέσεις.

14

Οι σχεδιασμοί Box-Behnken

15

Δημιουργούνται χρησιμοποιώντας τον πλήρη 2^k παραγοντικό σχεδιασμό σε έναν BIB σχεδιασμό (μιας ειδικής μορφής block σχεδιασμού) και προστίθενται και κεντρικά σημεία στη συνέχεια.

Προτιμούνται όταν το πείραμα έχει προγραμματιστεί να γίνει μια φορά.

Εξασφαλίζουν ότι σε καμία πειραματική δοκιμή δεν θα μελετώνται ταυτόχρονα όλοι οι παράγοντες στο υψηλό ή στο χαμηλό τους επίπεδο.

Είναι οικονομικότεροι από τους Κεντρικά Συνδυασμένους Σχεδιασμούς (προφανώς όταν το πλήθος των παραγόντων είναι ίδιο και στους CCD χρησιμοποιούμε πλήρεις σχεδιασμούς στο παραγοντικό μέρος), καθώς απαιτούν λιγότερες πειραματικές δοκιμές.

Έχουν 3 επίπεδα ανά παράγοντα.

16

Μέρος του πίνακα 4 από το άρθρο των Box and Wilson (Technometrics, 1960)

Number of Factors(k)	Design Matrix
3	$\begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \pm 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \pm 1 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17

Παράδειγμα Ο BB σχεδιασμός για τρεις και τέσσερις παράγοντες με 3 κεντρικά σημεία, επιπρόσθετα

A	B	C	A	B	C	D
-1	-1	0	-1	-1	0	0
1	-1	0	1	-1	0	0
-1	1	0	-1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
-1	0	-1	-1	0	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	0
-1	0	1	-1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
0	-1	-1	0	-1	-1	0
0	1	-1	0	1	-1	0
0	-1	1	0	-1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

18

Οι Ορθογώνιοι Σχηματισμοί τριών επιπέδων

19

Έχουν 3 επίπεδα ανά παράγοντα.

Επιτυγχάνουν βαθμό ορθογωνιότητας τουλάχιστον 2 (όσο μεγαλύτερος τόσο καλύτερα...)

Υπάρχουν (ή τουλάχιστον πιστεύουμε ότι μπορούμε να τους κατασκευάσουμε) όταν το πλήθος των θεραπειών, n , είναι πολλαπλάσιο του 9. Γενικά, αν υπάρχουν για κάποιο n και k , είναι πολλοί... (η βέλτιστη λοιπόν επιλογή θέλει «ψάξιμο», όπως είδαμε άλλωστε και στα κλάσματα με δύο επίπεδα)

Είναι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί και μπορεί να είναι απλοί ή σύνθετοι (εδώ είναι πιο πολύπλοκα τα πράγματα για τον διαχωρισμό τους και την ταξινόμησή τους αυτή, σε σχέση με τα όσα είδαμε στους σχεδιασμούς με δύο επίπεδα).

Δεν είναι απαραίτητο να προστεθούν κεντρικά σημεία (αν και η χρήση επαναλήψεων στα κεντρικά σημεία επιτρέπει την ανεξάρτητη εκτίμηση του πειραματικού σφάλματος).

20

Παραδείγματα ΟΑ(18,4,3,3,3,2)

A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0
-1	1	0	0	-1	1	0	0	-1	1	0	0	-1	1	0	0
-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
-1	0	1	1	-1	0	1	-1	-1	0	1	-1	-1	0	1	1
-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
0	-1	0	-1	0	-1	0	1	0	-1	0	-1	0	-1	0	1
0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	-1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	-1	1	0	0	-1	1	0	0	-1	1	0	0	-1	1	0
0	0	-1	1	0	0	-1	1	0	0	-1	1	0	0	-1	-1
0	1	-1	1	0	1	-1	-1	0	1	-1	-1	0	1	-1	1
1	-1	0	1	1	-1	0	-1	1	-1	0	1	1	-1	0	1
1	0	1	-1	1	0	1	1	1	0	1	-1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	-1	1	1	0	-1
1	-1	-1	0	1	-1	-1	0	1	-1	-1	0	1	-1	-1	0
1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1

21

Παραδείγματα χρήσης

22

Παράδειγμα 1 CCD

MINITAB Data sets: Seal strength data

HotBarT	DwellTime	HotBarP	MatTemp	HotBar_Temp	Time	Pressure	Mat_Temp	Strength
200	1	50	110	1	1	-1	1	12.447
225	0.75	100	90	2	0	0	0	24.7047
125	0.75	100	90	-2	0	0	0	20.6865
175	0.75	100	90	0	0	0	0	29.1
175	0.75	100	50	0	0	0	-2	27.4284
200	0.5	150	110	1	-1	1	1	30.301
150	1	150	110	-1	1	1	1	23.299
175	0.75	100	90	0	0	0	0	28.3
175	0.75	0	90	0	0	2	0	25.9942
200	0.5	50	110	1	-1	-1	1	27.649
175	0.75	100	90	0	0	0	0	28.2
175	0.75	100	90	0	0	0	0	28.7
175	0.75	100	90	0	0	0	0	27.4
150	0.5	150	70	-1	-1	1	-1	12.001
200	1	150	110	1	1	1	-1	15.699
200	1	50	70	1	1	-1	-1	8.251
150	0.5	50	110	-1	-1	-1	1	12.201
200	0.5	50	70	1	-1	-1	-1	26.749
175	1.25	100	90	0	2	0	0	21.3752
150	0.5	50	70	-1	-1	-1	-1	10.501
150	1	50	70	-1	1	-1	-1	15.699
175	0.75	100	90	0	0	0	0	28.9
200	1	150	70	1	1	1	-1	13.703
175	0.25	100	90	0	2	0	0	25.5021
150	0.5	150	110	-1	-1	1	1	15.701
175	0.75	200	90	0	0	2	0	30.0581
175	0.75	100	130	0	0	0	2	30.0516
200	0.5	150	70	1	-1	1	-1	28.401
150	1	150	70	-1	1	1	-1	21.599
175	0.75	100	90	0	0	0	0	28.5
150	1	50	110	-1	1	-1	1	19.799

Ένας μηχανικός πρέπει να διασφαλίσει ότι οι σφραγίδες στις πλαστικές σακούλες που συγκρατούν ένα προϊόν είναι αρκετά ισχυρές ώστε να αποτρέπουν διαρροές, αλλά όχι τόσο ισχυρές ώστε ο καταναλωτής να μην μπορεί να ανοίξει τις σακούλες.

Ο μηχανικός θέλει να βελτιστοποιήσει την αντοχή σφράγισης μεταξύ 20 και 32 λίβρες (κάτω και άνω όρια) με στόχο τα 26 λίβρες.

Ο μηχανικός θεωρεί ότι η θερμοκρασία της θερμής ράβδου, ο χρόνος παραμονής και η πίεση της θερμής ράβδου καθώς και η θερμοκρασία του προϊόντος είναι παράγοντες που επηρεάζουν την αντοχή της στεγανοποίησης.

23

Παράδειγμα 1 CCD (Μοντέλο (4))

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	14	1158.26	82.733	4.58	0.002
Linear	4	467.50	116.876	6.46	0.003
HotBarTemp	1	148.06	148.064	8.19	0.011
Time	1	292.93	292.931	16.20	0.001
Pressure	1	67.66	67.659	3.74	0.071
MatTemp	1	12.28	12.279	0.68	0.422
Square	4	378.51	94.627	5.23	0.007
HotBarTemp*HotBarTemp	1	176.66	176.660	9.77	0.007
Time*Time	1	73.35	73.352	4.06	0.061
Pressure*Pressure	1	144.70	144.701	8.00	0.012
MatTemp*MatTemp	1	28.04	28.041	1.55	0.231
2-Way Interaction	6	546.79	91.132	5.04	0.004
HotBarTemp*Time	1	540.47	540.470	29.89	0.000
HotBarTemp*Pressure	1	0.12	0.121	0.01	0.936
HotBarTemp*MatTemp	1	0.30	0.305	0.02	0.898
Time*Pressure	1	4.84	4.840	0.27	0.612
Time*MatTemp	1	0.90	0.899	0.05	0.826
Pressure*MatTemp	1	0.16	0.160	0.01	0.926
Error	16	289.33	18.083		
Lack-of-Fit	8	270.68	33.835	14.51	0.001
Pure Error	8	18.65	2.331		
Total	30	1447.60			

24

Παράδειγμα 1 CCD (Μοντέλο (4))



25

Παράδειγμα 2 CCD

A	B	C	y
-1.00000	-1.00000	-1.00000	66
1.00000	-1.00000	-1.00000	80
-1.00000	1.00000	-1.00000	78
1.00000	1.00000	-1.00000	100
-1.00000	-1.00000	1.00000	70
1.00000	-1.00000	1.00000	70
-1.00000	1.00000	1.00000	60
1.00000	1.00000	1.00000	75
-1.68179	0.00000	0.00000	100
1.68179	0.00000	0.00000	80
0.00000	-1.68179	0.00000	68
0.00000	1.68179	0.00000	63
0.00000	0.00000	-1.68179	65
0.00000	0.00000	1.68179	82
0.00000	0.00000	0.00000	113
0.00000	0.00000	0.00000	100
0.00000	0.00000	0.00000	118
0.00000	0.00000	0.00000	88
0.00000	0.00000	0.00000	100
0.00000	0.00000	0.00000	100
0.00000	0.00000	0.00000	85

D. C. Montgomery, *Design and analysis of experiments*, 5th ed., Wiley, New York, 2004.

Optimizing crystal growth (maximize)

$$\alpha = \sqrt[4]{8} = 1.68179$$

Πλήθος κεντρικών σημείων: 6

Central Composite Design

Design Summary	
Factors:	3 Replicates: 1
Base runs:	20 Total runs: 20
Base blocks:	1 Total blocks: 1
$\alpha = 1.68179$	
Two-level factorial: Full factorial	
Point Types	
Cube points:	8
Center points in cube:	6
Axial points:	6
Center points in axial:	0

26

Παράδειγμα 2 (Μοντέλο (4))

Analysis of Variance

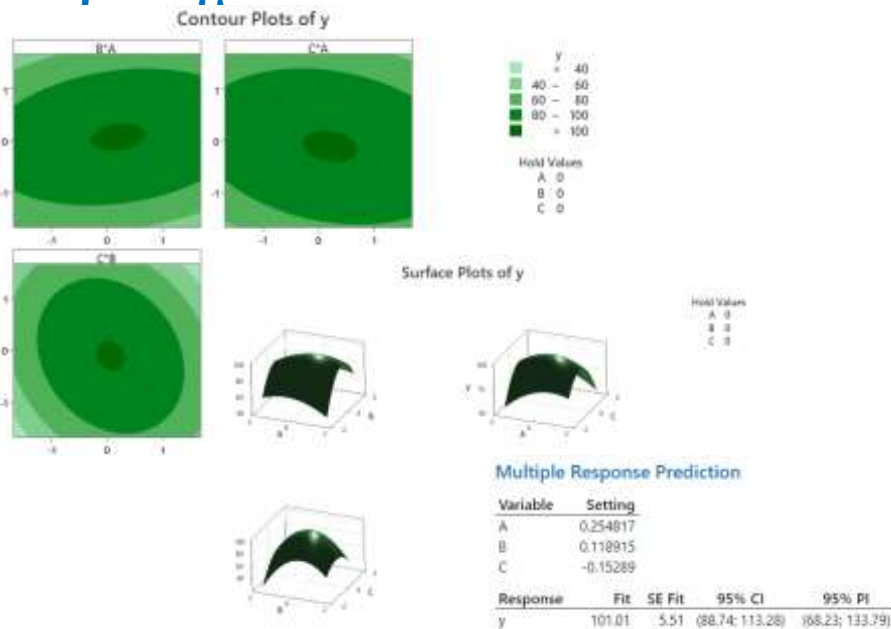
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	3662.00	406.89	2.19	0.119
Linear	3	77.89	25.96	0.14	0.934
A	1	22.08	22.08	0.12	0.738
B	1	25.31	25.31	0.14	0.720
C	1	30.50	30.50	0.16	0.694
Square	3	3291.74	1097.25	5.90	0.014
A*A	1	204.55	204.55	1.10	0.319
B*B	1	2226.45	2226.45	11.96	0.006
C*C	1	1328.46	1328.46	7.14	0.023
2-Way Interaction	3	292.38	97.46	0.52	0.676
A*B	1	66.13	66.13	0.36	0.564
A*C	1	55.12	55.12	0.30	0.598
B*C	1	171.13	171.13	0.92	0.360
Error	10	1860.95	186.09		
Lack-of-Fit	5	1001.61	200.32	1.17	0.435
Pure Error	5	859.33	171.87		
Total	19	5522.95			

Regression Equation in Uncoded Units

$$Y = 100.67 + 1.27 A + 1.36 B - 1.49 C - 3.77 AA - 12.43 BB - 9.60 CC + 2.88 AB - 2.62 AC - 4.63 BC$$

27

Παράδειγμα 2



28

Παράδειγμα 2 (Μοντέλο (3))

Analysis of Variance

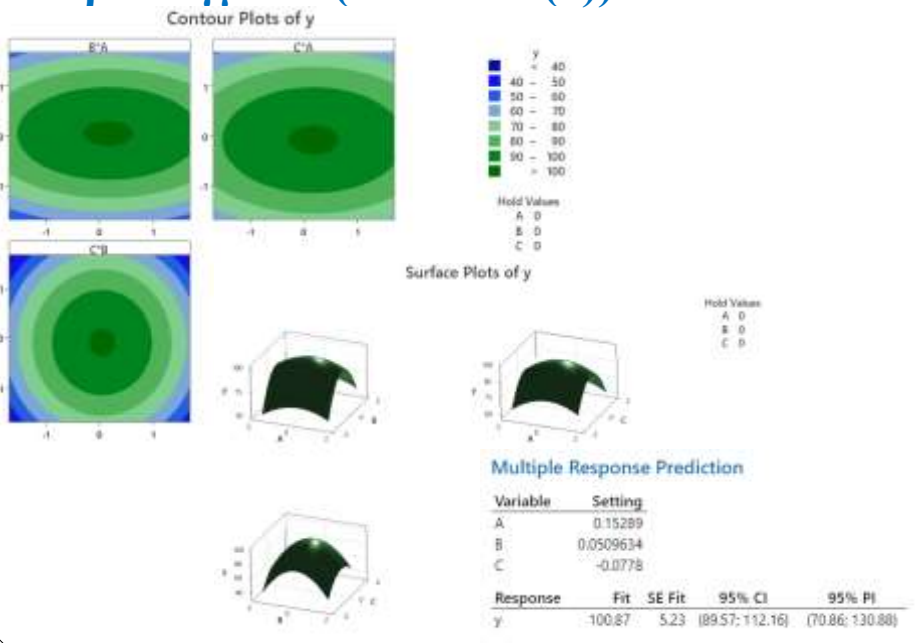
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	6	3369.63	561.60	3.39	0.031
Linear	3	77.89	25.96	0.16	0.923
A	1	22.08	22.08	0.13	0.721
B	1	25.31	25.31	0.15	0.702
C	1	30.50	30.50	0.18	0.675
Square	3	3291.74	1097.25	6.62	0.006
A*A	1	204.55	204.55	1.23	0.287
B*B	1	2226.45	2226.45	13.44	0.003
C*C	1	1328.46	1328.46	8.02	0.014
Error	13	2153.32	165.64		
Lack-of-Fit	8	1293.99	161.75	0.94	0.554
Pure Error	5	859.33	171.87		
Total	19	5522.95			

Regression Equation in Uncoded Units

$$Y = 100.67 + 1.27 A + 1.36 B - 1.49 C - 3.77 AA - 12.43 BB - 9.60 CC$$

29

Παράδειγμα 2 (Μοντέλο (3))



30

Παράδειγμα 3 CCD

A	B	C	D	y
-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	58.2
1.0	-1.0	-1.0	-1.0	23.4
-1.0	1.0	-1.0	-1.0	21.9
1.0	1.0	-1.0	-1.0	21.8
-1.0	-1.0	1.0	-1.0	14.3
1.0	-1.0	1.0	-1.0	6.3
-1.0	1.0	1.0	-1.0	4.5
1.0	1.0	1.0	-1.0	21.8
-1.0	-1.0	-1.0	1.0	46.7
1.0	-1.0	-1.0	1.0	53.2
-1.0	1.0	-1.0	1.0	23.7
1.0	1.0	-1.0	1.0	40.3
-1.0	-1.0	1.0	1.0	7.5
1.0	-1.0	1.0	1.0	13.3
-1.0	1.0	1.0	1.0	49.3
1.0	1.0	1.0	1.0	20.1
-1.4	0.0	0.0	0.0	31.1
1.4	0.0	0.0	0.0	28.1
0.0	-1.4	0.0	0.0	17.5
0.0	1.4	0.0	0.0	49.5
0.0	0.0	-1.4	0.0	49.9
0.0	0.0	1.4	0.0	34.2
0.0	0.0	0.0	-1.4	31.1
0.0	0.0	0.0	1.4	41.1
0.0	0.0	0.0	0.0	32.8

C. F. J. Wu and M. Hamada, *Experiments: Planning, Analysis, and Parameter Design Optimization*, 2nd ed., Wiley, New York, 2009.

Chang, Kononenko and Franklin (*Industrial and Engineering Chemistry* **52**, (1960))
Ammonia experiment (Response: % yield of 2,5-dimethylpiperazine (maximize))

Design Summary

Factors: 4 Replicates: 1
Base runs: 25 Total runs: 25
Base blocks: 1 Total blocks: 1

$\alpha = 1.4$

Two-level factorial: Full factorial

Point Types

Cube points: 15
Center points in cube: 1
Axial points: 8
Center points in axial: 0

31

Παράδειγμα 3 (μοντέλο (4))

Analysis of Variance

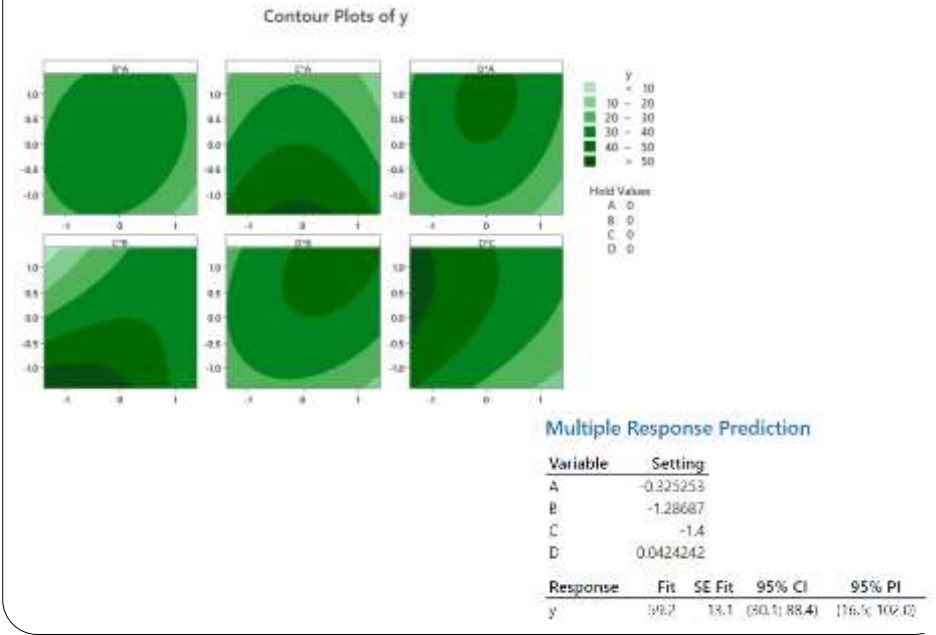
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	14	3829.39	273.53	1.39	0.305
Linear	4	2060.58	515.15	2.61	0.099
A	1	45.48	45.48	0.23	0.641
B	1	32.13	32.13	0.16	0.695
C	1	1521.28	1521.28	7.72	0.020
D	1	461.69	461.69	2.34	0.157
Square	4	498.49	124.62	0.63	0.651
A*A	1	291.35	291.35	1.48	0.252
B*B	1	132.48	132.48	0.67	0.431
C*C	1	0.46	0.46	0.00	0.962
D*D	1	60.90	60.90	0.31	0.591
2-Way Interaction	6	1270.32	211.72	1.07	0.438
A*B	1	77.00	77.00	0.39	0.546
A*C	1	0.33	0.33	0.00	0.968
A*D	1	40.01	40.01	0.20	0.662
B*C	1	1025.60	1025.60	5.20	0.046
B*D	1	126.00	126.00	0.64	0.443
C*D	1	1.38	1.38	0.01	0.935
Error	10	1970.89	197.09		
Total	24	5800.28			

Regression Equation in Uncoded Units

$$Y = 39.85 - 1.51 A + 1.27 B - 8.74 C + 4.81 D - 6.11 A*A - 4.12 B*B + 0.24 C*C - 2.79 D*D + 2.19 A*B - 0.14 A*C + 1.58 A*D + 8.01 B*C + 2.81 B*D + 0.29 C*D$$

32

Παράδειγμα 3 (μοντέλο (4))



33

Παράδειγμα 4 Box-Behnken

A	B	C	D	y
-1	-1	0	0	84.7
1	-1	0	0	93.3
-1	1	0	0	84.2
1	1	0	0	86.1
0	0	-1	-1	85.7
0	0	1	-1	96.4
0	0	-1	1	88.3
0	0	1	1	81.8
-1	0	0	-1	89.4
1	0	0	-1	88.7
-1	0	0	1	77.8
1	0	0	1	80.9
0	-1	-1	0	80.9
0	1	-1	0	79.8
0	-1	1	0	86.8
0	1	1	0	79.0
-1	0	-1	0	79.7
1	0	-1	0	92.5
-1	0	1	0	89.4
1	0	1	0	86.9
0	-1	0	-1	86.1
0	1	0	-1	87.9
0	-1	0	1	85.1
0	1	0	1	76.4
0	0	0	0	93.8
0	0	0	0	87.3
0	0	0	0	90.7

GEP Box and DW Wilson, Three level designs for the study of quantitative variables, *Tecnometrics*, 2 (1960).

Design Summary

Factors:	4	Replicates:	1
Block runs:	27	Total runs:	27
Block blocks:	1	Total blocks:	1

Center points: 3

34

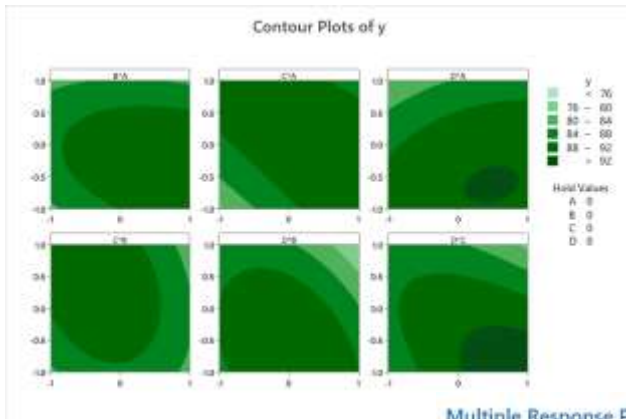
Παράδειγμα 4 Box-Behnken (μοντέλο (4))

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	14	563.279	40.234	3.81	0.013
Linear	4	268.355	67.089	6.35	0.006
A	1	44.853	44.853	4.25	0.062
B	1	46.021	46.021	4.36	0.059
C	1	15.413	15.413	1.46	0.250
D	1	162.068	162.068	15.35	0.002
Square	4	110.534	27.633	2.62	0.088
A*A	1	10.704	10.704	1.01	0.334
B*B	1	99.956	99.956	9.47	0.010
C*C	1	26.800	26.800	2.54	0.137
D*D	1	35.478	35.478	3.36	0.092
2-Way interaction	6	184.390	30.732	2.91	0.054
A*B	1	11.223	11.223	1.06	0.323
A*C	1	58.523	58.523	5.54	0.036
A*D	1	3.610	3.610	0.34	0.570
B*C	1	11.222	11.222	1.06	0.323
B*D	1	27.562	27.562	2.61	0.132
C*D	1	72.250	72.250	6.84	0.023
Error	12	126.711	10.559		
Lack-of-Fit	10	105.571	10.557	1.00	0.599
Pure Error	2	21.140	10.570		
Total	26	689.990			

35

Παράδειγμα 4 Box-Behnken (μοντέλο (4))



Multiple Response Prediction

Variable	Setting
A	-1
B	0.0779158
C	1
D	-1

Response	Fit	SE Fit	95% CI	95% PI
y	96.29	3.67	(88.29; 104.29)	(85.61; 106.97)

36

Μία παρατήρηση...

G. E. P. Box and N. R. Draper, *Response surfaces, mixtures and Ridge Analysis*, 2nd ed. Wiley, Hoboken NJ, 2007.

Σελίδα 63

there is a very large amount of data, investigation might show that the deficient model is, nevertheless, sufficient for the purpose at hand and therefore may be used with proper caution. (Remember that all models are wrong; the practical question is how wrong do they have to be to not be useful.)

Σελίδα 414

... approximation does not necessarily detract from its usefulness because all models are approximations. Essentially, all models are wrong, but some are useful. However, the approximate nature of the model must always be borne in mind because if $e = (e_1, \dots, e_n)$ is a vector of random errors having zero vector

George Edward Pelham Box

(18 Οκτωβρίου 1919 – 28 Μαρτίου 2013)

37

Βιβλιογραφία

G. E. P. Box and N. R. Draper, *Response surfaces, mixtures and Ridge Analysis*, 2nd ed. Wiley, Hoboken NJ, 2007.

A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane and J. Stufken, *Orthogonal Arrays: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

D. C. Montgomery, *Design and analysis of experiments*, 5th ed., Wiley, New York, 2004.

C. F. J. Wu and M. Hamada, *Experiments: Planning, Analysis, and Parameter Design Optimization*, 2nd ed., Wiley, New York, 2009.

38