Σχεδιασμοί Πειραμάτων: Κατασκευές και Εφαρμογές

Χ. Ευαγγελάρας

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

1

Μία επανάληψη του 2^k παραγοντικού πειράματος

k παράγοντες, με 2 επίπεδα ο καθένας, n=1,
«μέγιστη οικονομία» (μπορούμε άραγε
περισσότερο;;;) πειραματικών πόρων

2

Ακόμη και όταν έχουμε έναν σχετικά μικρό αριθμό παραγόντων προς διερεύνηση σε ένα πείραμα, ο συνολικός αριθμός των θεραπειών σε έναν 2^k παραγοντικό σχεδιασμό είναι μεγάλος.

Για παράδειγμα, ένας 2^5 σχεδιασμός έχει 32 θεραπείες σε μια πλήρη επανάληψή του, ένας 2^6 σχεδιασμός έχει 64 κ.ο.κ.

Συνήθως, οι πόροι για πειραματισμό είναι περιορισμένοι ενώ οι παράγοντες προς διερεύνηση είναι αρκετοί, οπότε, ο αριθμός των επαναλήψεων τις οποίες μπορεί να κάνει ο πειραματιστής πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

Μια μόνο επανάληψη ενός 2^k παραγοντικού σχεδιασμού ονομάζεται **μη-επαναλαμβανόμενος (unreplicated)** παραγοντικός σχεδιασμός.

Με μια μόνον επανάληψη, όπως έχουμε δει, δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα, οπότε, δεν μπορούμε να κάνουμε ελέγχους για τη σημαντικότητα των παραγοντικών επιδράσεων.

3

Παράδειγμα

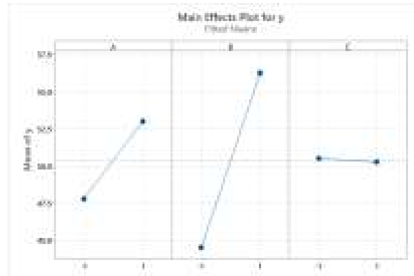
Ένας γεωργός θέλει να μελετήσει την επίδραση που έχει η ποσότητα τριών λιπασμάτων που χρησιμοποιεί ταυτόχρονα στην καλλιέργειά του, στο ύψος της τελικής του παραγωγής. Οι παράγοντες (Λίπασμα A, Λίπασμα B και Λίπασμα C) εξετάζονται σε δύο επίπεδα ο καθένας και συγκεκριμένα ο A στις τιμές 100 και 150 Kg, ο B στις τιμές 250 και 300 Kg και ο C στις τιμές 200 και 250 Kg. Για κάθε θεραπεία κάνει 1 μέτρηση.

Σχεδιασμός										
A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*		
100	250	200	χαμηλή	χαμηλή	χαμηλή	-	-	-	(1)	41
150	250	200	υψηλή	χαμηλή	χαμηλή	+	-	-	*a*	49
100	300	200	χαμηλή	υψηλή	χαμηλή	-	+	-	*b*	55
150	300	200	υψηλή	υψηλή	χαμηλή	+	+	-	*ab*	57
100	250	250	χαμηλή	χαμηλή	υψηλή	-	-	+	*c*	40
150	250	250	υψηλή	χαμηλή	υψηλή	+	-	+	*ac*	48
100	300	250	χαμηλή	υψηλή	υψηλή	-	+	+	*bc*	55
150	300	250	υψηλή	υψηλή	υψηλή	+	+	+	*abc*	58

4

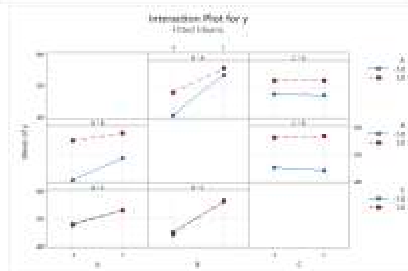
Coded Coefficients

Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant		50.38	*	*	*	
A	5.250	2.625	*	*	*	1.00
B	11.750	5.875	*	*	*	1.00
C	-0.2500	-0.1250	*	*	*	1.00
A*B	-2.750	-1.375	*	*	*	1.00
A*C	0.2500	0.1250	*	*	*	1.00
B*C	0.7500	0.3750	*	*	*	1.00
A*B*C	0.2500	0.1250	*	*	*	1.00



Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
A	1	55.125	55.125	*	*
B	1	276.125	276.125	*	*
C	1	0.125	0.125	*	*
A*B	1	15.125	15.125	*	*
A*C	1	0.125	0.125	*	*
B*C	1	1.125	1.125	*	*
A*B*C	1	0.125	0.125	*	*
Error	0	*	*		
Total	7	347.875			

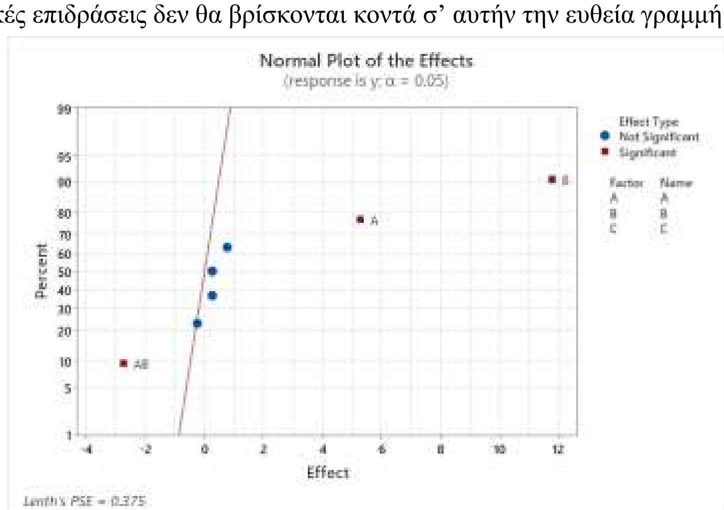


Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διαδικασία με το «ψευδοσφάλμα». Όμως, στην περίπτωση των συγκεκριμένων σχεδιασμών, υπάρχουν πιο «αντικειμενικές» μέθοδοι.

5

Το κανονικό διάγραμμα πιθανότητας των επιδράσεων

Ο Daniel (1959) πρότεινε τη γραφική παράσταση των εκτιμήσεων των επιδράσεων σε ειδικό κανονικό χαρτί (normal probability paper). Οι επιδράσεις που είναι αμελητέες τείνουν να πέσουν πάνω σε μια ευθεία γραμμή σ’ αυτό το γράφημα, ενώ οι σημαντικές επιδράσεις δεν θα βρίσκονται κοντά σ’ αυτήν την ευθεία γραμμή.



6

Άλλες μέθοδοι ανάλυσης δεδομένων από μη επαναλαμβανόμενους 2^k σχεδιασμούς

Αρκετοί ερευνητές έχουν προτείνει εναλλακτικές μεθόδους ανάλυσης μη επαναλαμβανόμενων σχεδιασμών (δείτε σχετικά και Hamada and Balakrishnan (*Statistica Sinica*, 1998)).
Ίσως η δημοφιλέστερη από αυτές είναι η μέθοδος του Lenth, η οποία δημοσιεύτηκε το 1989 στο επιστημονικό περιοδικό Technometrics.

7

Σχεδιασμοί κρησαρίσματος με 2 επίπεδα

Μελέτη παραγοντικών επιδράσεων με όσο το δυνατό λιγότερα πειράματα.

Οι 2^{k-p} κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί και οι Ορθογώνιοι σχηματισμοί με δύο επίπεδα

8

Καθώς μεγαλώνει ο αριθμός των παραγόντων, η χρήση ενός 2^k παραγοντικού σχεδιασμού καταλήγει σε ραγδαία αύξηση του αριθμού των εκτελέσεων που απαιτούνται για μια πλήρη επανάληψη του σχεδιασμού.

Για παράδειγμα, μια πλήρης επανάληψη του 2^6 σχεδιασμού απαιτεί 64 εκτελέσεις. Σε αυτόν τον σχεδιασμό μόνο 6 από τους 63 βαθμούς ελευθερίας αντιστοιχούν στις κύριες επιδράσεις και μόνο 15 βαθμοί ελευθερίας αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων.

Οι υπόλοιποι 42 βαθμοί ελευθερίας αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις τριών και περισσότερων παραγόντων, δηλαδή σε επιδράσεις που με βάση τις αρχές της σποραδικότητας, της ιεραρχίας και της κληρονομικότητας δεν αναμένεται να είναι τελικά σημαντικές!

9

Σχεδιασμοί κρησαρίσματος

Με πολύ απλά λόγια, με τον όρο αυτό χαρακτηρίζονται οι σχεδιασμοί με τη χρήση των οποίων μπορούμε, με το ελάχιστο πλήθος πειραματικών δοκιμών, να εκτιμήσουμε σίγουρα τις κύριες επιδράσεις των παραγόντων ανεξάρτητα τη μία από την άλλη.

Οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος «παραδοσιακά» μελετούν τους παράγοντες σε δύο επίπεδα (αυτό, όπως είδαμε, περιορίζει τις πειραματικές δοκιμές σε κάθε περίπτωση).
Έτσι, οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί 2 επιπέδων, που ανήκουν στην οικογένεια των Ορθογώνιων Σχηματισμών με βαθμό ορθογωνιότητας (β.ο.) τουλάχιστον 2), χρησιμοποιούνται συχνά για το σκοπό αυτό. Σημειώνεται ότι, επειδή είναι κλασματικοί σχεδιασμοί, έχουμε σίγουρα σύγχυση επιδράσεων!

Σημείωση: Στην πρόσφατη βιβλιογραφία, έχουν προταθεί και σχεδιασμοί κρησαρίσματος με περισσότερα επίπεδα, με τους οποίους μελετάμε μοντέλα που περιλαμβάνουν και όρους δεύτερης τάξης.

10

Σχεδιασμοί κρησαρίσματος

Οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί 2 επιπέδων, βασικά όσοι εξ'αυτών ανήκουν στην οικογένεια των Ορθογώνιων Σχηματισμών (με β.ο. τουλάχιστον 2), ταξινομούνται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- Στους απλούς (regular) κλασματικούς σχεδιασμούς, οι οποίοι έχουν συγκεκριμένη δομή στηλών δηλαδή, κάποιες στήλες τους, είναι αλληλεπιδράσεις (δηλαδή γινόμενα) άλλων στηλών. Οι συγκεκριμένοι συμβολίζονται ως **2^{k-p} κλασματικοί σχεδιασμοί**.
- Στους σύνθετους (nonregular) κλασματικούς σχεδιασμούς, στους οποίους δεν παρατηρείται κάποια δομή στις στήλες τους.

11

Χρήση

Κάθε παράγοντας που μελετάται σε δύο επίπεδα, «τοποθετείται» σε μία από τις k διαθέσιμες στήλες του σχηματισμού.

Οι n γραμμές «δείχνουν» τους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων (θεραπείες) με βάση τους οποίους θα γίνουν οι μετρήσεις της μεταβλητής απόκρισης.

Η ανάλυση γίνεται με κλασσικές μεθόδους πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης. Συνήθως, μελετάμε το **γραμμικό μοντέλο κύριων επιδράσεων** (χωρίς αλληλεπιδράσεις δηλαδή).

Μετά την αναγνώριση των σημαντικών κύριων επιδράσεων, **προβάλλουμε το σχεδιασμό** στους σημαντικούς παράγοντες και συνεχίζουμε την ανάλυση, μελετώντας και αλληλεπιδράσεις τους (ΑΝ γίνεται).

Προφανώς, αν ο σχεδιασμός το επιτρέπει, μπορούμε να μελετήσουμε και πιο σύνθετο μοντέλο από την αρχή.

12

Οι 2^{k-1} κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί

Το ½ κλάσμα, μια απλή περίπτωση –
Τρόπος κατασκευής

13

Παράδειγμα

Θεωρούμε ένα πείραμα με τρεις παράγοντες, ο καθένας σε δύο στάθμες. Οι πειραματικές συνθήκες δεν επιτρέπουν τη μελέτη και των 2^3 =8 θεραπειών, παρά μόνο τεσσάρων από αυτές, δηλαδή τις μισές. Επειδή ο σχεδιασμός θα περιέχει 2^{3-1} = 4 θεραπείες, καλείται **ένα 1/2 κλάσμα του 2^3** σχεδιασμού ή ένας **2^{3-1} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός**.

Ερώτημα: Ποιες 4 από τις 8 δυνατές θεραπείες θα χρησιμοποιήσουμε; Μήπως κάποια επιλογή είναι «καλύτερη» από τις άλλες;

14

Ένας τρόπος επιλογής

Ας θυμηθούμε τον πίνακα αλγεβρικών προσήμων του πλήρους παραγοντικού πειράματος με 3 παράγοντες των δύο επιπέδων ο καθένας. Ένας κλασματικός 2^{3-1} πειραματικός σχεδιασμός μπορεί να κατασκευαστεί αν επιλέξουμε μια στήλη του πίνακα προσήμων και κρατήσουμε αυτές τις γραμμές που η συγκεκριμένη στήλη επιλογής έχει το ίδιο επίπεδο.

I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
+	-	-	+	-	+	+	-
+	+	-	-	-	-	+	+
+	-	+	-	-	+	-	+
+	+	+	+	-	-	-	-
+	-	-	+	+	-	-	+
+	+	-	-	+	+	-	-
+	-	+	-	+	-	+	-
+	+	+	+	+	+	+	+

15

Μία πρώτη επιλογή (Ε1)

Πχ. Επιλογή στήλης ABC και επιλογή επιπέδου « - »

I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
+	-	-	+	-	+	+	-
+	+	-	-	-	-	+	+
+	-	+	-	-	+	-	+
+	+	+	+	-	-	-	-
+	-	-	+	+	-	-	+
+	+	-	-	+	+	-	-
+	-	+	-	+	-	+	-
+	+	+	+	+	+	+	+

16

Κρατώντας μόνο το οριζόντιο γραμμοσκιασμένο κομμάτι, έχουμε τον πίνακα αλγεβρικών προσήμων ενός κλασματικού Παραγοντικού σχεδιασμού, τριών παραγόντων

I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
+	-	-	+	-	+	+	-
+	+	+	+	-	-	-	-
+	+	-	-	+	+	-	-
+	-	+	-	+	-	+	-

Και ο σχεδιασμός είναι

A	B	C
-	-	-
+	+	-
+	-	+
-	+	+

17

Λίγο ορολογία

Ο 2^{3-1} σχεδιασμός σχηματίστηκε επιλέγοντας μόνον εκείνες τις θεραπείες που έχουν αρνητικό πρόσημο στη στήλη ABC.

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η ABC «γεννά» το σχεδιασμό αυτό και για αυτό το λόγο ονομάζεται **γεννήτορας (generator)** αυτού του συγκεκριμένου κλάσματος.

Μερικές φορές θα αναφερόμαστε σε έναν γεννήτορα όπως ο ABC σαν μια «**λέξη**».

Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η στήλη του γεννήτορα στον πίνακα προσήμων του κλασματικού σχεδιασμού θα είναι είτε ίση με τη στήλη I είτε ίση με – I.

Τη σχέση αυτή (στο συγκεκριμένο παράδειγμα I = - ABC) την ονομάζουμε **ορίζουσα σχέση (defining relation)** για το σχεδιασμό μας.

18

Μια δεύτερη επιλογή (Ε2)

Πχ. Επιλογή στήλης BC και επιλογή επιπέδου « - »

I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
+	-	-	+	-	+	+	-
+	+	-	-	-	-	+	+
+	-	+	-	-	+	-	+
+	+	+	+	-	-	-	-
+	-	-	+	+	-	-	+
+	+	-	-	+	+	-	-
+	-	+	-	+	-	+	-
+	+	+	+	+	+	+	+

$$I = -BC$$

19

Πόσο χρήσιμος όμως είναι ο σχεδιασμός της Ε2;

Έστω ότι τον χρησιμοποιήσαμε και μετρήσαμε μια μεταβλητή απόκρισης

A	B	C	y
-	+	-	b
+	+	-	ab
-	-	+	c
+	-	+	ac

Η εκτίμηση της επίδρασης του παράγοντα B

$$B = \frac{b+ab}{2} - \frac{c+ac}{2} = \frac{b+ab-c-ac}{2}$$

Η εκτίμηση της επίδρασης του παράγοντα C

$$C = \frac{c+ac}{2} - \frac{b+ab}{2} = \frac{c+ac-b-ab}{2}$$

Αν συγκρίνουμε τις επιδράσεις, θα δούμε ότι ΠΑΝΤΑ ανεξαρτήτως φύσης πειράματος, μετρήσεων κλπ.

$$B = -C$$

20

Η έννοια της σύγχυσης των επιδράσεων αναλυτικά

Με τη συγκεκριμένη επιλογή – E2 – λοιπόν, φτιάξαμε έναν κλασματικό σχεδιασμό, ο οποίος, «μπλέκει» ή «συγχέει» δύο από τις 3 κύριες επιδράσεις, με συνέπεια να μην μπορούμε να τις ξεχωρίσουμε και να αντιστοιχήσουμε στην καθεμία την επίδραση που πράγματι έχει στο πείραμα

Η σύγχιση των επιδράσεων στους κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς 2 επιπέδων φαίνεται άμεσα παρατηρώντας κάποια ορίζουσα σχέση: Θα δούμε σε λίγο πως!

$$I = -BC$$

I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
+	-	+	-	-	+	-	+
+	+	+	+	-	-	-	-
+	-	-	+	+	-	-	+
+	+	-	-	+	+	-	-

21

Συμβαίνει κάτι παρόμοιο με το σχεδιασμό της E1, με ορίζουσα σχέση την I = - ABC;

Έστω ότι τον χρησιμοποιήσαμε και μετρήσαμε μια μεταβλητή απόκρισης

A	B	C	y
-	-	-	(1)
+	+	-	ab
+	-	+	ac
-	+	+	bc

Η εκτίμηση της επίδρασης του παράγοντα B

$$B = \frac{ab+bc}{2} - \frac{(1)+ac}{2} = \frac{-(1)+ab-ac+bc}{2}$$

Η εκτίμηση της επίδρασης του παράγοντα C

$$C = \frac{ac+bc}{2} - \frac{(1)+ab}{2} = \frac{-(1)-ab+ac+bc}{2}$$

Και οι εκτιμήτριες είναι ασυσχέτιστες

Μήπως όμως συμβαίνει κάτι ανάλογο με προηγουμένως, αλλά με κάποιες άλλες επιδράσεις;

22

Λίγο θεωρία

Κάθε **απλός** κλασματικός σχεδιασμός **χαρακτηρίζεται** από την ή τις **ορίζουσες σχέσεις** του. Γνωρίζοντας τις ορίζουσες σχέσεις βρίσκουμε εύκολα τις επιδράσεις αυτές που συγχέονται.

Τρόπος προσδιορισμού

Γράφουμε σε μια στήλη όλες τις παραγοντικές επιδράσεις και στη συνέχεια, σε μια δεύτερη γράφουμε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με την ορίζουσα σχέση (λαμβάνουμε υπόψη ότι F·F=I, αφού έχουμε ως επίπεδα τα +1 και –1 – Η στήλη I έχει μόνο +1). Οι γραμμές του πίνακα που φτιάχνονται είναι η απάντηση.

Επίδραση	I = - ABC
A	A·I = - A·ABC= - BC
B	B·I = - B·ABC= - AC
AB	AB·I = - AB·ABC= - C
C	C·I= - C·ABC= - AB
AC	AC·I= - AC·ABC= - B
BC	BC·I= - BC·ABC= - A
ABC	ABC·I= - ABC·ABC= - I

Επιδράσεις που συγχέονται
A, -BC
B, -AC
AB, -C
C, -AB
AC, -B
BC, -A
ABC, -I

23

Λίγο θεωρία

Οι επιδράσεις που συγχέονται σε ένα κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό λέγονται συχνά **ταυτόσημες επιδράσεις**.

Ο προσδιορισμός του συνόλου των ταυτόσημων επιδράσεων καλείται και προσδιορισμός της **δομής** των ταυτόσημων επιδράσεων.

Όταν υπάρχουν περισσότερες από μια ορίζουσες εξισώσεις (συμβαίνει σε κλασματικούς σχεδιασμούς όπου επιλέγονται θεραπείες κατά πολύ λιγότερες από τις θεραπείες του πλήρους σχεδιασμού όπως θα δούμε αργότερα), ο προσδιορισμός της δομής των ταυτόσημων επιδράσεων μπορεί να είναι ιδιαίτερα επίπονη διαδικασία.

24

Διακριτική ικανότητα σχεδιασμού (Resolution)

Ο 2^{3-1} σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση την $I = -ABC$ που κατασκευάσαμε, ονομάζεται σχεδιασμός με **διακριτική ικανότητα** III.

Σε έναν τέτοιο σχεδιασμό, οι κύριες επιδράσεις είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων.

Γενικά, ένας σχεδιασμός έχει **διακριτική ικανότητα *R***, αν ***καμία επίδραση*** p-παραγόντων **δεν είναι ταυτόσημη** με ***άλλη επίδραση*** που περιέχει λιγότερους από $R-p$ παράγοντες.

Για τη διακριτική ικανότητα ενός σχεδιασμού συνήθως χρησιμοποιούμε τη Ρωμαϊκή αρίθμηση. Επομένως, το 1/2 κλάσμα του 2^3 σχεδιασμού με ορίζουσα σχέση την I = - ABC (ή την I = ABC) είναι ένας 2_{III}^{3-1} σχεδιασμός.

Η διακριτική ικανότητα ενός απλού κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού με δύο επίπεδα είναι ίση με το μήκος της μικρότερης «λέξης» που χρησιμοποιείται σε ορίζουσα σχέση σαν γεννήτορας.

25

Συνοψίζοντας:

Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας III. Σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση, αλλά οι κύριες επιδράσεις είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων.

Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας IV. Σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση, ή με οποιαδήποτε αλληλεπίδραση δύο παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων είναι ταυτόσημες με άλλες αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων.

Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας V. Σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση ή αλληλεπίδραση δύο παραγόντων δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση ή αλληλεπίδραση δύο παραγόντων, αλλά αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων.

Σχεδιασμοί διακριτικής ικανότητας VI. Σχεδιασμοί στους οποίους…………

26

Παρατηρήσεις

Η διακριτική ικανότητα R των απλών κλασματικών σχεδιασμών έχει άμεση σχέση με το βαθμό ορθογωνιότητας (β.ο.) που συναντήσαμε όταν περιγράφαμε γενικά τους Ορθογώνιους Σχηματισμούς, και την ίδια ακριβώς ερμηνεία!

Γενικά, ισχύει ότι R = β.ο. + 1.

Συνήθως θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε κλασματικούς σχεδιασμούς που έχουν την υψηλότερη δυνατή διακριτική ικανότητα. Γιατί;

Επειδή η υψηλή διακριτική ικανότητα βάζει λιγότερους περιορισμούς στις υποθέσεις που απαιτούνται όσον αφορά ποιες αλληλεπιδράσεις είναι αμελητέες με σκοπό να πάρουμε μια μοναδική ερμηνεία για τις παραγοντικές επιδράσεις.

27

Παρατηρήσεις

Ας φανταστούμε μια περίπτωση δηλαδή που χρησιμοποιούμε έναν σχεδιασμό με διακριτική ικανότητα III (θεωρώντας ότι οι αλληλεπιδράσεις $1^{ης}$ τάξης είναι αμελητέες) για να μελετήσουμε 4 παράγοντες σε δύο επίπεδα, στον οποίο ισχύει A= BC.

Από την ανάλυση ας πούμε ότι προκύπτουν σημαντικές οι κύριες επιδράσεις A, B και C. Εμείς, θα αποδώσουμε τη σημαντικότητα στην κύρια επίδραση του A όμως, ενδέχεται για τη σημαντικότητα αυτή να ευθύνεται η BC!

Αν όμως είχαμε χρησιμοποιήσει έναν σχεδιασμό με διακριτική ικανότητα IV, τότε η A δεν θα ήταν ταυτόσημη με την BC, και συνεπώς δεν θα μας είχε δημιουργηθεί αυτή η αμφιβολία!

28

Ένας πιο γρήγορος τρόπος για κατασκευή ½ κλασμάτων

Ένα 1/2 κλάσμα του 2^k σχεδιασμού μπορεί να κατασκευαστεί γράφοντας έναν **βασικό σχεδιασμό** που αποτελείται από τις εκτελέσεις ενός πλήρους 2^{k-1} παραγοντικού σχεδιασμού με k–1 παράγοντες και στη συνέχεια προσθέτοντας τον k–οστό παράγοντα, αναγνωρίζοντας τα επίπεδά του με βάση το γεννήτορα που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε (ή αντίστοιχα την ορίζουσα σχέση του).

Παράδειγμα

Να κατασκευαστεί ο 2^{3-1} κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με γεννήτορα τον ABC.

29

Παράδειγμα

Αριθμός θεραπειών: 4 Αριθμός παραγόντων: 3

Γεννήτορας: ABC Ορίζουσα σχέση: $I = ABC$

$I = ABC \Leftrightarrow C = AB$

Βασικός σχεδιασμός: Ο πλήρης $2^2 = (2^{3-1})$

A	B	C (=AB)
-	-	+
-	+	-
+	-	-
+	+	+

Ο 2^{3-1} κλασματικός σχεδιασμός με ορίζουσα σχέση: $I = ABC$

A	B	C
-	-	+
-	+	-
+	-	-
+	+	+

30

Οι 2^{k-2} κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί

ή τα ¼ κλάσματα

31

Κατασκευή ενός 2^{k-2} σχεδιασμού

Χρησιμοποιούνται δύο γεννήτορες $\longrightarrow$ διαιρούν τις θεραπείες του πλήρους στα τέσσερα

Με βάση τον πίνακα προσήμων : Διαλέγουμε δύο παραγοντικές επιδράσεις *XXX*, *YYY* ως γεννήτορες και από τον πίνακα προσήμων διαλέγουμε συγκεκριμένο συνδυασμό των προσήμων των *XXX*, *YYY* για την επιλογή των θεραπειών

Με το βασικό σχεδιασμό: Δημιουργούμε έναν πλήρη 2^{k-2} βασικό σχεδιασμό και προσθέτουμε 2 στήλες με βάση τους γεννήτορες που επιλέχθηκαν.

Παράδειγμα

Να κατασκευαστεί ένας 2^{4-2} κλασματικός σχεδιασμός με γεννήτορες τους *ABC* και *BCD* και επιλογή στάθμεων τις + και + (δηλαδή με ορίζουσες σχέσεις τις $I = ABC$ και $I = BCD$)

32

A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+
+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-
-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-
+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-
+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+
-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+
+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-
+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+
+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-
-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-
-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

33

Ο 2^{4-2} κλασματικός σχεδιασμός

A	B	C	D
-	+	-	-
-	-	+	-
+	-	-	+
+	+	+	+

και ο πίνακας προσήμων του

I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-
+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-
+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Με τη λογική αυτή και αυτή η στήλη μοιάζει με ορίζουσα εξίσωση αφού $I = AD$.

Τι συμβαίνει;

γεννήτορες

$I = ABC$

$I = BCD$

34

Πλήθος οριζουσών σχέσεων στον 2^{k-2} σχεδιασμό

Πλήθος γεννητόρων: 2
(έστω XXX και YYY, όπου XXX και YYY οποιεσδήποτε 2 επιδράσεις)
Πλήθος οριζουσών σχέσεων με βάση τους γεννήτορες: 2 (οι I = ±XXX και I = ±YYY)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι :

$$I \cdot I = (\pm XXX) \cdot (\pm YYY) = \pm XXXYYY$$

Δημιουργείται δηλαδή και μια ακόμα ορίζουσα σχέση με βάση το γινόμενο των 2 αρχικών.
Έτσι, ο 2^{k-2} κλασματικός σχεδιασμός έχει 3 $(= 2^2 - 1)$ ορίζουσες σχέσεις.

35

Παράδειγμα

Με χρήση του πίνακα προσήμων του 2^{4-2} να βρεθεί η δομή των ταυτόσημων επιδράσεων του και να δοθεί η διακριτική του ικανότητα.

I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-
+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-
+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

$I = ABC = AD = BCD$

$A = BC = D = ABCD$

$B = AC = CD = ABD$

$C = AB = BD = ACD$

$R = II$

36

Παράδειγμα (συνέχεια)

Να κατασκευαστεί ένας 2^{4-2} κλασματικός σχεδιασμός με ορίζουσες σχέσεις τις $I = ABC$ και $I = BCD$ (δηλαδή με γεννήτορες τους ABC και BCD και επιλογή στάθμεων τις + και +)

Αριθμός θεραπειών: 4 Αριθμός παραγόντων: 4

Ορίζουσες σχέσεις: $I = ABC \quad I = BCD$

$I = ABC \Leftrightarrow C = AB$

$I = BCD \Leftrightarrow D = AC$

Βασικός σχεδιασμός: Ο πλήρης $2^2 = (2^{4-2})$

A	B	C (=AB)	D(=BC)
-	-	+	-
-	+	-	-
+	-	-	+
+	+	+	+

Ο 2^{4-2} κλασματικός σχεδιασμός με ορίζουσες σχέσεις:

$I = ABC \quad I = BCD$

A	B	C	D
-	-	+	-
-	+	-	-
+	-	-	+
+	+	+	+

37

Παράδειγμα (συνέχεια)

Δομή ταυτόσημων επιδράσεων με βάση τις ορίζουσες σχέσεις

$I = ABC \quad I = BCD$ άρα και $I = (ABC)(BCD) = AD$

Επίδραση	I= ABC	I= BCD	I= AD
A	AABC = BC	ABCD = ABCD	AAD = D
B	BABC = AC	BBCD = CD	BAD = ABD
AB	ABABC = C	ABBCD = ACD	ABAD = BD
C	CABC = AB	CBCD = BD	CAD = ACD
AC	ACABC = B	ACBCD = ABD	ACAD = CD
BC	BCABC = A	BCBCD = D	BCAD = ABCD
ABC	ABCABC = I	ABCBCD = AD	ABCAD = BCD
D	DABC = ABCD	DBCD = BC	DAD = A
AD	ADABC = BCD	ADBCD = ABC	ADAD = I
BD	BDABC = ACD	BDBCD = C	BDAD = ABD
ABD	ABDABC = CD	ABDBCD = AC	ABDAD = B
CD	CDABC = ABD	CDBCD = B	CDAD = AC
ACD	ACDABC = BD	ACDBCD = AB	ACDAD = C
BCD	BCDABC = AD	BCDBCD = I	BCDAD = ABC
ABCD	ABCDABC = D	ABCDBCD = A	ABCDAD = BC

$$I = ABC = AD = BCD$$

$$A = BC = D = ABCD$$

$$B = AC = CD = ABD$$

$$C = AB = BD = ACD$$

38

Ο σχεδιασμός με βάση τον πίνακα προσήμων

A	B	C	D
-	+	-	-
-	-	+	-
+	-	-	+
+	+	+	+

Ο σχεδιασμός με βάση την κατασκευή με χρήση των γεννητόρων

A	B	C	D
-	-	+	-
-	+	-	-
+	-	-	+
+	+	+	+

Ορισμός

Δύο σχεδιασμοί καλούνται ισοδύναμοι αν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο με εναλλαγές γραμμών ή και στηλών ή και με εναλλαγές των προσήμων σε μία ή περισσότερες στήλες του

39

Οι 2^{k-p} κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί

p γεννήτορες και πολλές ($2^p - 1$) ορίζουσες σχέσεις

40

Προβολή 2^{k-p} κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών

Οποιοσδήποτε κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με διακριτική ικανότητα R περιέχει πλήρεις παραγοντικούς σχεδιασμούς (ενδεχομένως επαναλαμβανόμενους παραγοντικούς σχεδιασμούς) σε οποιοδήποτε υποσύνολο $R-1$ παραγόντων. Αυτή είναι μια σημαντική και χρήσιμη παρατήρηση.

Για παράδειγμα, αν ένας πειραματιστής εξετάζει αρκετούς παράγοντες που ενδεχομένως τον ενδιαφέρουν, αλλά πιστεύει ότι μόνον $R-1$ από αυτούς θα έχουν σημαντικές επιδράσεις, τότε ένας κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός με διακριτική ικανότητα R είναι η κατάλληλη επιλογή του σχεδιασμού. Αν η εικασία του πειραματιστή είναι σωστή, τότε ο κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός θα προβάλλεται σε έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό στους $R-1$ σημαντικούς παράγοντες.

41

Η ανάλυση στους 2^{k-p} κλασματικούς σχεδιασμούς

Η ανάλυση των κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών δεν διαφέρει από την ανάλυση των πλήρων παραγοντικών σχεδιασμών, μόνο που πλέον ορισμένες επιδράσεις δεν μπορούν να διαχωριστούν από άλλες (ταυτόσημες επιδράσεις).

Έτσι, η αντίθεση που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό μιας παραγοντικής επίδρασης συμβαίνει να είναι ίδια με την αντίθεση κάποιας άλλης επίδρασης (στους 2^{k-p} κλασματικούς σχεδιασμούς αυτό θα συμβαίνει για τις αντιθέσεις συνολικά 2^p επιδράσεων, όσων δηλαδή ανήκουν σε μια κατηγορία της δομής των ταυτόσημων επιδράσεων – θυμηθείτε τον πίνακα αλγεβρικών προσήμων με βάση τον οποίο υπολογίζονται οι αντιθέσεις).

Για το λόγο αυτό συνηθίζεται να χρησιμοποιείται η αρχή της ιεραρχίας των επιδράσεων και ο υπολογισμός της επίδρασης με βάση την αντίθεση να «χρεώνεται» στην επίδραση αυτή με τη μεγαλύτερη ιεραρχία, θεωρώντας τις επιδράσεις μεγαλύτερης τάξης αμελητέες.

Όταν ανάμεσα στις ταυτόσημες επιδράσεις όμως υπάρχουν κάποιες με την ίδια ιεραρχία, ο διαχωρισμός δεν είναι άμεσος.

42

Παράδειγμα

Έγινε ένα πείραμα για τη μελέτη των παραγόντων που πιστεύεται ότι επηρεάζουν την απόδοση ενός μηχανήματος που χρησιμοποιείται σε μια βιομηχανική μονάδα. Μελετήθηκαν οι παρακάτω επτά παράγοντες, ο καθένας σε δύο στάθμες (χαμηλή, υψηλή).

A: η ποσότητα της λιπαντικής ουσίας (10ml, 15ml),

B: ο χρόνος λειτουργίας (1 ώρα, 2 ώρες),

C: οι στροφές λειτουργίας (3000 rpm, 4000 rpm),

D: η ποσότητα καυσίμου στο ρεζερβουάρ (50lt, 75lt),

E: η θερμοκρασία λειτουργίας (20 ℃, 22 ℃),

F: η ποιότητα καυσίμου (85 οκτάνια, 95 οκτάνια) και

G: η τάση της μπαταρίας (8V, 12V).

Οι πειραματικές εκτελέσεις (συνδυασμοί των επιπέδων των παραγόντων) έγιναν με βάση τον 2^{7-4} κλασματικό σχεδιασμό με γεννήτορες τους D=AB, E= – AC, F= – BC G= – ABC, και οι αντίστοιχες αποκρίσεις είναι:

A	B	C	D	E	F	G	y
10ml	1h	4000rpm	75lt	20°C	85	12V	55
10ml	1h	3000rpm	75lt	22°C	95	8V	62
15ml	2h	4000rpm	75lt	22°C	95	12V	84
10ml	2h	3000rpm	50lt	22°C	85	12V	57
15ml	2h	3000rpm	75lt	20°C	85	8V	74
10ml	2h	4000rpm	50lt	20°C	95	8V	64
15ml	1h	4000rpm	50lt	22°C	85	8V	73
15ml	1h	3000rpm	50lt	20°C	95	12V	81

43

Design Summary

Factors:	7	Base Design:	3; 8	Resolution:	III
Runs:	8	Replicates:	1	Fraction:	1/16
Blocks:	1	Center pts (total):	0		

*** NOTE * Some main effects are confounded with two-way interactions.**

Design Generators: D = AB; E = -AC; F = -BC; G = -ABC

Alias Structure

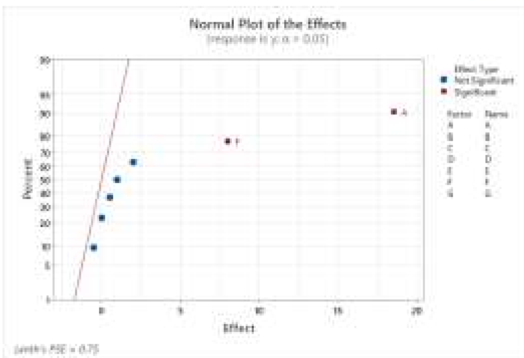
I + ABD - ACE + AFG - BCF + BEG - CDG + DEF - ABCG + ABEF - ACDF + ADEG - BCDE + BDFG - CEFG - ABCDEFG
A + BD - CE + FG - BCG + BEF - CDF + DEG - ABCF + ABEG - ACDG + ADEF - ABCDE + ABDFG - ACEFG - BCDEFG
B + AD - CF + EG - ACG + AEF - CDE + DFG - ABCE + ABFG - BCDG + BDEF - ABCDF + ABDEG - BCEFG - ACDEFG
C - AE - BF - DG - ABG - ADF - BDE - EFG + ABCD + ACFG + BCEG + CDEF + ABCEF + ACDEG + BCDFG - ABDEFG
D + AB - CG + EF - ACF + AEG - BCE + BFG - ACDE + ADFG - BCDF + BDEG - ABCDG + ABDEF - CDEFG - ABCEFG
E - AC + BG + DF + ABF + ADG - BCD - CFG + ABDE + AEFG - BCEF - CDEG - ABCEG - ACDEF + BDEFG - ABCDFG
F + AG - BC + DE + ABE - ACD + BDG - CEG + ABDF - ACEF + BEFG - CDFG - ABCFG + ADEFG - BCDEF - ABCDEG
G + AF + BE - CD - ABC + ADE + BDF - CEF + ABDG - ACEG - BCFG + DEFG + ABEFG - ACDFG - BCDEG - ABCDEF

44

Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant		68.75	*	*	*	
A	18.500	9.250	*	*	*	1.00
B	2.000	1.000	*	*	*	1.00
C	-0.5000	-0.2500	*	*	*	1.00
D	-0.000000	-0.000000	*	*	*	1.00
E	0.5000	0.2500	*	*	*	1.00
F	8.000	4.000	*	*	*	1.00
G	1.0000	0.5000	*	*	*	1.00

Analysis of Variance

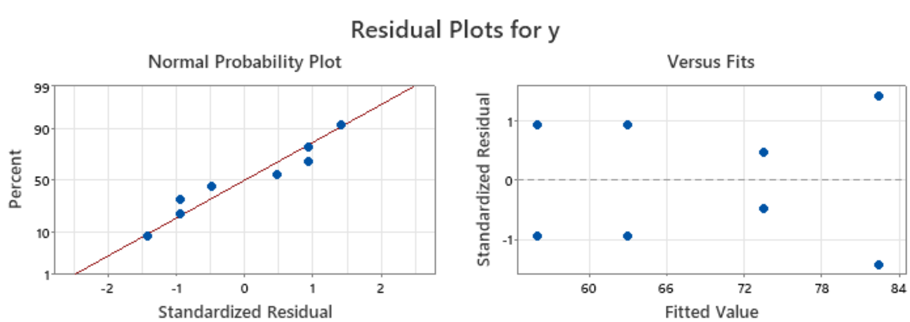
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	7	823.500	117.643	*	*
Linear	7	823.500	117.643	*	*
A	1	684.500	684.500	*	*
B	1	8.000	8.000	*	*
C	1	0.500	0.500	*	*
D	1	0.000	0.000	*	*
E	1	0.500	0.500	*	*
F	1	128.000	128.000	*	*
G	1	2.000	2.000	*	*
Error	0	*	*		
Total	7	823.500			



45

Προβολή στους σημαντικούς παράγοντες

Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant		68.750	0.530	129.64	0.000	
A	18.500	9.250	0.530	17.44	0.000	1.00
F	8.000	4.000	0.530	7.54	0.002	1.00
A*F	1.000	0.500	0.530	0.94	0.399	1.00



Με ποια επίδραση είναι ταυτόσημη η AF που μελετάμε εδώ;

46

Σύνθετοι κλασματικοί σχεδιασμοί και (μεγαλύτερη) οικονομία

Είναι φανερό ότι το πλήθος n των εκτελέσεων ενός 2^k πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού ή ενός 2^{k-p} απλού κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού είναι δύναμη του 2. Συνεπώς, μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει τέτοιους σχεδιασμούς κάνοντας 8, 16, 32, 64 κλπ εκτελέσεις.

Κάποιοι άλλοι Ορθογώνιοι Σχηματισμοί (με βαθμό ορθογωνιότητας τουλάχιστον 2) προσφέρουν πιο οικονομικούς σχεδιασμούς αφού – για να επιτρέπεται η κατασκευή τους – αρκεί το πλήθος των εκτελέσεων n είναι πολλαπλάσιο του 4. **Οι σχεδιασμοί αυτοί δεν έχουν «δομή» στηλών, όπως οι απλοί κλασματικοί σχεδιασμοί και γι' αυτό καλούνται σύνθετοι (nonregular).**

47

Σύνθετοι κλασματικοί σχεδιασμοί και οικονομία

Η επιβεβαίωση σχετικά με το πλήθος των εκτελέσεων n, προκύπτει εύκολα αφού, για να επιτυγχάνεται βαθμός ορθογωνιότητας (τουλάχιστον) 2, θα πρέπει σε κάθε δύο στήλες οι 4 διαφορετικοί συνδυασμοί επιπέδων να εμφανίζονται εξίσου συχνά, έστω λ φορές η καθεμία. Έχουμε λοιπόν ότι $n=4\lambda$ ή $\lambda = n/4$.

Σ1	Σ2	
-1	-1	n/4 φορές
-1	+1	n/4 φορές
+1	-1	n/4 φορές
+1	+1	n/4 φορές

48

Ορθογώνιοι σχηματισμοί: Ύπαρξη

Εφόσον, λοιπόν, οι ορθογώνιοι σχηματισμοί είναι πολύ χρήσιμοι για τη μελέτη κύριων επιδράσεων παραγόντων, ένα ερώτημα που εγείρεται είναι το εξής: Δοθέντος ότι μπορώ να χρησιμοποιήσω n (=4λ) εκτελέσεις, μέχρι πόσες κύριες επιδράσεις παραγόντων με δύο στάθμες μπορώ να μελετήσω;

ή εναλλακτικά,

Πόσες στήλες μπορεί να έχει ένας Ορθογώνιος Σχηματισμός (β. ο. 2) με δύο επίπεδα;

Απάντηση: Γενικά, μπορεί να έχει μέχρι και $n-1$ στήλες δύο επιπέδων. Στην περίπτωση που έχει ακριβώς $n-1$ στήλες, τότε καλείται **κορεσμένος ορθογώνιος σχηματισμός**.

49

Ορθογώνιοι σχηματισμοί: Ύπαρξη

Επιπλέον,

μπορούμε, για κάθε n που είναι πολλαπλάσιο του 4 να φτιάξουμε έναν Ορθογώνιο Σχηματισμό δύο επιπέδων ο οποίος να έχει τον μέγιστο αριθμό στηλών;

Απάντηση: Μέχρι σήμερα δεν έχουν κατασκευαστεί κορεσμένοι ορθογώνιοι σχηματισμοί, ούτε έχει προταθεί κάποια μέθοδος κατασκευής για όλα τα n που είναι πολλαπλάσια του 4.

Αν όμως υπάρχει ή μπορεί να κατασκευαστεί ένας n x $(n-1)$ Ορθογώνιος Σχηματισμός με δύο επίπεδα, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλούς n x k Ορθογώνιους Σχηματισμούς με δύο επίπεδα, όπου $k < n-1$.

50

Σχεδιασμοί Plackett- Burman

- Πρόκειται για κορεσμένους ορθογώνιους σχηματισμούς χρήσιμους για τη διεξαγωγή πειραμάτων κρησαρίσματος (Screening Designs).
- Κατασκευάστηκαν από τους Plackett and Burman το 1946 από όπου πήραν και το όνομά τους.
- Είναι σχεδιασμοί με 2 επίπεδα, με τους οποίους μπορούμε με n εκτελέσεις να μελετήσουμε n–1 παράγοντες.
- Η κατασκευή τους γίνεται κύριως με τη χρήση διανυσμάτων, που λέγονται διανύσματα – γεννήτορες.
- Γενικά, ανήκουν στην κατηγορία των σχεδιασμών Hadamard.
- Όταν το n είναι δύναμη του 2, τότε αυτοί ανήκουν στους απλούς κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς.

51

Κατασκευή Plackett- Burman σχεδιασμών

Για κάποιο n = 4λ, επιλέγουμε το κατάλληλο διάνυσμα – γεννήτορα, όπως δόθηκε από τους Plackett-Burman.

n	*Γεννήτορας*
8	$+ + + - + - -$
12	$+ + - + + + - - - + -$
16	$+ + + + - + - + + - - + - - -$
20	$+ + - - + + + + - + - + - - - - + + -$
24	$+ + + + + - + - + + - - + + - - + - + - - - -$

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε άλλες n-2 γραμμές με κύκλικες μεταθέσεις του γεννήτορα και τέλος,

προσθέτουμε μία τελευταία γραμμή με όλα τα στοιχεία –1

52

O Plackett – Burman σχεδιασμός με 8 εκτελέσεις και 7 στήλες

A	B	C	D	E	F	G
+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1
-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1
+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1
+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1
+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Είναι αυτός που χρησιμοποιήθηκε στο Παράδειγμα ανάλυσης στους απλούς κλασματικούς!

53

Κατασκευή ορθογώνιων σχηματισμών από Plackett – Burman σχεδιασμούς

Αν θέλουμε να μελετήσουμε λιγότερους από $n-1$ παράγοντες (έστω k), μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν κατάλληλο νέο σχεδιασμό, επιλέγοντας k από τις $n-1$ διαθέσιμες στήλες του κορεσμένου Plackett-Burman σχεδιασμού. Προφανώς, ο νέος σχεδιασμός θα είναι ***Ορθογώνιος Σχηματισμός*** με βαθμό ορθογωνιότητας τουλάχιστον 2 (Γιατί;).

Σε αυτή την περίπτωση, μπορεί κάποιος να δει ότι είναι πιθανό να μπορούμε να μελετήσουμε και κάποιες αλληλεπιδράσεις παραγόντων (αφού πλέον περισσεύουν κάποιο βαθμοί ελευθερίας).

54

Κατασκευή ορθογώνιων σχηματισμών από Plackett – Burman σχεδιασμούς

Είναι λογικό κάποιος να ισχυριστεί ότι κάποιες συγκεκριμένες επιλογές στηλών θα δίνουν καλύτερους σχεδιασμούς από κάποιες άλλες επιλογές. **Έχει δίκιο**;

Ας το δούμε χρησιμοποιώντας τον P–B σχεδιασμό με 8 γραμμές και επτά στήλες, που όπως είπαμε είναι ισοδύναμος με τον απλό κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό και δηλαδή, θα μπορούμε να «δούμε» εύκολα τη «δομή» των σχεδιασμών που θα προκύπτουν, ώστε οι συγκρίσεις να είναι εμφανείς.

55

Παράδειγμα

A	B	C	D	E	F	G
+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1
-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1
+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1
+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1
+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Να δούμε τρεις επιλογές τριών στηλών, τις
A, B και C,
A, B και D και,
A, B και E

56

Παράδειγμα

A	B	C	A	B	D	A	B	E
+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1
-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1
+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1
-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1
+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1
+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Είναι ο πλήρης   Είναι 2^{3-1} με D = - AB   Είναι ο πλήρης

57

Σημειώσεις…

… αν μας ενδιαφέρουν μόνο οι κύριες επιδράσεις (κρησάρισμα), οι κλασματικοί σχεδιασμοί δύο επιπέδων με β.ο. τουλάχιστον2 είναι πολύ χρήσιμοι. Οι σύνθετοι κλασματικοί είναι πολύ οικονομικότεροι από τους απλούς κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς. Σημειώνεται ότι οι κύριες επιδράσεις συγκεντρώνουν το βασικό ενδιαφέρον των ερευνητών στα αρχικά στάδια πειραματισμού, στα οποία και χρησιμοποιούνται οι σχεδιασμοί κρησαρίσματος.

… αν όμως ενδιαφέρουν και αλληλεπιδράσεις παραγόντων, τότε ενδέχεται κάποιοι κλασματικοί σχεδιασμοί (απλοί ή σύνθετοι) να είναι χρήσιμοι, ενώ κάποιοι άλλοι όχι. Το ενδιαφέρον είναι ότι υπάρχουν διαθέσιμα κριτήρια που μπορούν να χαρακτηρίσουν τους ορθογώνιους σχηματισμούς (είτε είναι απλοί ή σύνθετοι κλασματικοί σχεδιασμοί), αναφορικά με τη δυνατότητά τους να εκτιμούν (ασυσχέτιστα τη μία από την άλλη) εκτός από τις κύριες επιδράσεις, και αλληλεπιδράσεις.

Βασίζονται σε τεχνικές παλινδρόμησης και στη μελέτη του πίνακα πληροφορίας του μοντέλου (με κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις) που ενδιαφέρει.

58

Παράδειγμα

Τρεις ΟΑ(16,4,2,2,2,2,2) και επιθυμητό μοντέλο το

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \varepsilon$$

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	-1
1	1	1	-1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	-1
1	1	-1	1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	1	1
1	1	1	-1
1	1	1	-1
1	1	-1	1
1	-1	1	1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1
-1	1	1	1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1

59

Παράδειγμα

Ο πρώτος (είναι 2^{4-1} απλός κλασματικός με x3 = x1 x2)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \varepsilon$$

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	-1
1	1	1	-1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1

$$X^T X = \begin{matrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{matrix}$$

$$\det(X^T X) = 0$$

60

Παράδειγμα

Ο δεύτερος (είναι σύνθετος, δεν έχει «δομή»)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \varepsilon$$

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	-1
1	1	-1	1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1

$$X^T X = \begin{matrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{matrix}$$

$$\det(X^T X) = 100663296$$

61

Παράδειγμα

Ο τρίτος (είναι σύνθετος, δεν έχει «δομή»)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \varepsilon$$

1	1	1	1
1	1	1	-1
1	1	1	-1
1	1	-1	1
1	-1	1	1
1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1
-1	1	1	1
-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1
-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1
-1	-1	-1	1

$$X^T X = \begin{matrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{matrix}$$

$$\det(X^T X) = 150994944$$

62

Βιβλιογραφία

A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane and J. Stufken, *Orthogonal Arrays: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

D. C. Montgomery, *Design and analysis of experiments*, 5th ed., Wiley, New York, 2004.

C. F. J. Wu and M. Hamada, *Experiments: Planning, Analysis, and Parameter Design Optimization*, 2nd ed., Wiley, New York, 2009.