Σχεδιασμοί Πειραμάτων: Κατασκευές και Εφαρμογές

Χ. Ευαγγελάρας

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

1

Ορθογώνιοι σχηματισμοί

$$OA(n, k, s_1, s_2, \ldots, s_k, t)$$

n είναι το πλήθος των γραμμών του σχεδιασμού, δηλαδή το πλήθος των πειραμάτων που θα εκτελέσουμε (λέγονται και εκτελέσεις - runs),
k είναι το πλήθος των στηλών του σχεδιασμού, δηλαδή το πλήθος των παραγόντων που μελετάμε και
t είναι ο βαθμός ορθογωνιότητας των στηλών του σχεδιασμού (καλείται και ισχύς - strength).

Ο βαθμός ορθογωνιότητας του σχεδιασμού μας δίνει πληροφορίες για τη σύγχυση των επιδράσεων. Όσο μεγαλύτερος, τόσο μικρότερη η σύγχυση!

2

Πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί

Είναι Ορθογώνιοι Σχηματισμοί και έχουν το μέγιστο βαθμό ορθογωνιότητας. Το γεγονός αυτό είναι που μας επιτρέπει να έχουμε ανεξάρτητη εκτίμηση **όλων** των παραγοντικών επιδράσεων.

Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί

Δεν ανήκουν πάντα στην κατηγορία των Ορθογώνιων Σχηματισμών και, αν ανήκουν, δεν επιτυγχάνουν το μέγιστο βαθμό ορθογωνιότητας. Στόχος είναι να καταφέρουμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιον που να επιτρέπει να εκτιμήσουμε τις επιδράσεις που θέλουμε.

3

Πως γίνεται αυτό;

Με βάση τις βασικές αρχές που διέπουν τις παραγοντικές επιδράσεις!

- Σποραδικότητα
- Ιεραρχία
- Κληρονομικότητα

Έτσι, επιλέγουμε κλασματικό σχεδιασμό που μπορεί σίγουρα να εκτιμήσει τις κύριες επιδράσεις ανεξάρτητα τη μία από την άλλη και στη συνέχεια, αν γίνεται, τις κύριες επιδράσεις ανεξάρτητα και από τις αλληλεπιδράσεις 1^{ης} τάξης και στη συνέχεια, αν γίνεται και τις αληλεπιδράσεις 1^{ης} τάξης ανεξάρητα τη μία από την άλλη, κ. ο. κ.

4

Οι επιπτώσεις του βαθμού ορθογωνιότητας στην ανάλυση

Η ανάλυση των πειραματικών δεδομένων μπορεί να γίνει με τη χρήση τόσο γραφικών, όσο και στατιστικών μεθόδων.

5

Το πρόβλημα του γεωργού

Ενας γεωργός ενδιαφέρεται να μελετήσει τις επιδράσεις που έχει το είδος του σπόρου, ο προμηθευτής του υγρού λιπάσματος και η ποσότητα του υγρού λιπάσματος που χρησιμοποιεί στο μέγεθος της τελικής συγκομιδής ενός προϊόντος. Στην αγορά υπάρχουν τρία είδη σπόρου (το Α, το Β και το Γ), τρεις προμηθευτές λιπάσματος (ο Π1, ο Π2 και ο Π3) ενώ το λίπασμα ενδείκνυται να χρησιμοποιείται σε τρεις ποσότητες (1lt, 1.5 lt και 2lt) ανά 50 τετραγωνικά μέτρα καλιέργειας. Για τον πειραματισμό, αποφασίζει να χρησιμοποιήσει κατάλληλο σχεδιασμό (εκτελώντας τα σχεδιασμένα πειράματα προφανώς σε ομογενείς συνθήκες καλλιέργειας).

6

Τέσσερα διαφορετικά πειράματα

Πείραμα 1: Χρήση κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού

(Βαθμός ορθογωνιότητας 0 – ούτε ισορροπία δηλαδή)

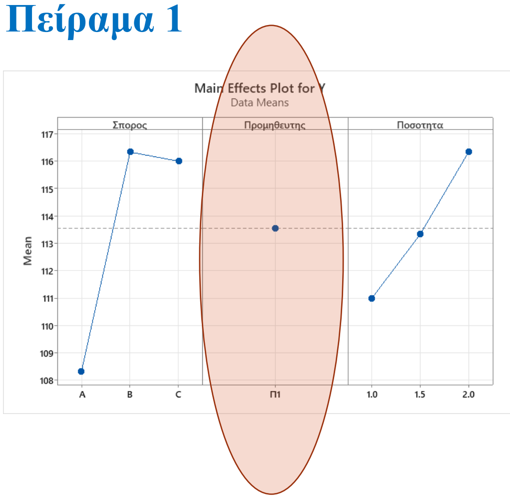
Επιλογή 1

A	B	C
1	1	1
1	1	2
1	1	3
2	1	1
2	1	2
2	1	3
3	1	1
3	1	2
3	1	3

Σπορος	Προμηθευτης	Ποσοτητα	Y
A	Π1	1.0	106
A	Π1	2.0	114
C	Π1	1.0	114
B	Π1	1.5	117
C	Π1	1.5	118
A	Π1	1.5	105
C	Π1	2.0	116
B	Π1	2.0	119
B	Π1	1.0	113

7

Πείραμα 1



Στο διάγραμμα των κύριων επιδράσεων «τοποθετούνται» οι σημειακές εκτιμήσεις των μέσων για κάθε επίπεδο των παραγόντων που εξετάζονται, όπως προκύπτουν από τις ληφθείσες μετρήσεις (τα μπλε σημεία).

Ενδείξεις που μπορεί να αποδοθούν σε πραγματική διαφορά των μέσων τιμών των επιπέδων φαίνονται από την κλίση των ευθύγραμμων τμημάτων που δημιουργούνται από τα σημεία.

* ERROR * Categorical predictors must have more than one distinct value.

Δεν έχουμε τον 2ο παράγοντα δηλαδή!

8

Τέσσερα διαφορετικά πειράματα

Πείραμα 2: Χρήση κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού

(Βαθμός ορθογωνιότητας 1

– μόνο ισορροπία δηλαδή)

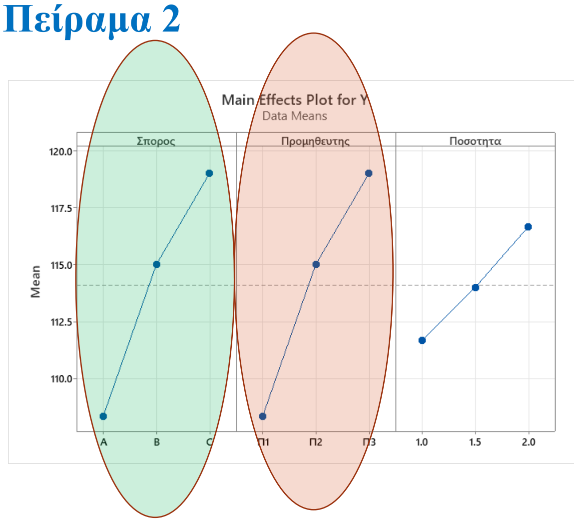
Επιλογή 2

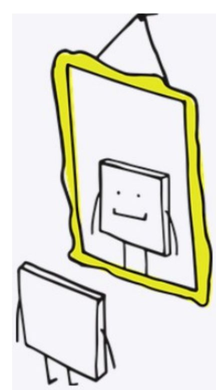
A	B	C
1	1	1
1	1	2
1	1	3
2	2	1
2	2	2
2	2	3
3	3	1
3	3	2
3	3	3

Σπορος	Προμηθευτης	Ποσοτητα	Y
A	Π1	2.0	114
A	Π1	1.0	106
A	Π1	1.5	105
B	Π2	1.0	117
B	Π2	2.0	116
C	Π3	1.5	125
C	Π3	1.0	112
B	Π2	1.5	112
C	Π3	2.0	120

9

Πείραμα 2





Ό,τι θα «βλέπουμε» για τον 1^{ο} παράγοντα, το ίδιο ακριβώς θα «βλέπουμε και για το 2^{ο} ! Πλήρης σύγχυση δηλαδή.

The following terms cannot be estimated and were removed:
Προμηθευτης

10

Τέσσερα διαφορετικά πειράματα

Πείραμα 3: Χρήση κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού

(Βαθμός ορθογωνιότητας 2 – ανεξάρτητη εκτίμηση μόνο των κύριων επιδράσεων)

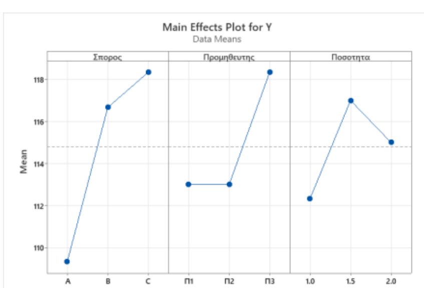
Επιλογή 3

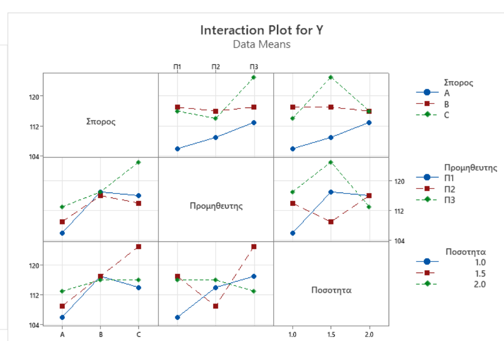
A	B	C
1	1	1
1	2	2
1	3	3
2	1	2
2	2	3
2	3	1
3	1	3
3	2	1
3	3	2

Σπορος	Προμηθευτης	Ποσοτητα	Y
B	Π1	1.5	117
A	Π1	1.0	106
C	Π2	1.0	114
C	Π1	2.0	116
B	Π3	1.0	117
B	Π2	2.0	116
C	Π3	1.5	125
A	Π2	1.5	109
A	Π3	2.0	113

11

Πείραμα 3





The following terms cannot be estimated and were removed:

Σπορος*Προμηθευτης;

Σπορος*Ποσοτητα;

Προμηθευτης*Ποσοτητα;

Σπορος*Προμηθευτης*Ποσοτητα

Οι κύριες επιδράσεις μπορεί να εκτιμηθούν ανεξάρτητα μεταξύ τους! Όχι όμως και κάτι επιπλέον

12

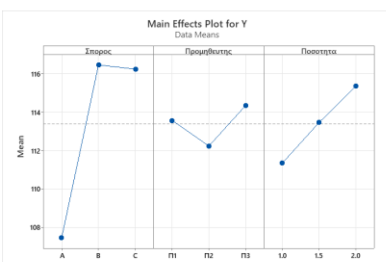
Τέσσερα διαφορετικά πειράματα

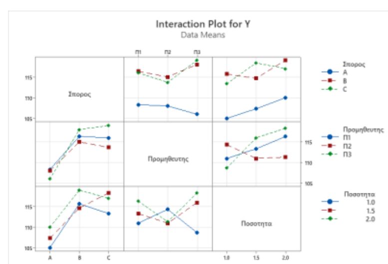
Πείραμα 4: Χρήση του πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού

Σπορος	Προμηθευτης	Ποσοτητα	Y
A	Π2	2.0	103
A	Π1	2.0	114
B	Π3	1.5	115
C	Π2	2.0	115
C	Π1	1.0	114
A	Π3	1.5	108
B	Π1	1.5	117
C	Π1	1.5	118
C	Π2	1.5	112
A	Π1	1.0	106
A	Π1	1.5	105
C	Π2	1.0	114
A	Π2	1.0	112
C	Π1	2.0	116
B	Π1	2.0	119
B	Π3	1.0	117
B	Π2	1.0	117
B	Π2	2.0	116
C	Π3	1.5	125
A	Π2	1.5	109
B	Π1	1.0	113
A	Π3	1.0	97
B	Π3	2.0	122
C	Π3	1.0	112
B	Π2	1.5	112
C	Π3	2.0	120
A	Π3	2.0	113

13

Πείραμα 4





Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Σπορος	2	474.30	237.148	*	*
Προμηθευτης	2	20.52	10.259	*	*
Ποσοτητα	2	72.07	36.037	*	*
Σπορος*Προμηθευτης	4	45.48	11.370	*	*
Σπορος*Ποσοτητα	4	36.59	9.148	*	*
Προμηθευτης*Ποσοτητα	4	143.70	35.926	*	*
Σπορος*Προμηθευτης*Ποσοτητα	8	129.63	16.204	*	*
Error	0	*	*		
Total	26	922.30			

Εδώ μπορεί να εκτιμηθούν όλες οι επιδράσεις. ΟΜΩΣ, δεν μπορούμε να κάνουμε ελέγχους σημαντικότητας γιατί δεν έχουμε επανάληψη!

14

Λίγο θεωρία – Η ανάλυση διασποράς

Source	*SS*	*DF*	*MS*	F
A	*SSA*	$a-1$	$SSA/(a-1)$	MSA/MSE
B	*SSB*	$b-1$	$SSB/(b-1)$	MSB/MSE
C	*SSC*	$c-1$	$SSC/(c-1)$	MSC/MSE
AB	*SSAB*	$(a-1)(b-1)$	$SSAB/[(a-1)(b-1)]$	$MSAB/MSE$
AC	*SSAC*	$(a-1)(c-1)$	$SSAC/[(a-1)(c-1)]$	$MSAC/MSE$
BC	*SSBC*	$(b-1)(c-1)$	$SSBC/[(b-1)(c-1)]$	$MSBC/MSE$
ABC	*SSABC*	$(a-1)(b-1)(c-1)$	$SSABC/[(a-1)(b-1)(c-1)]$	$MSABC/MSE$
Error	*SSE*	$abc(n-1)$	$SSE/abc(n-1)$	
Total	*SST*	$abcn-1$		

a, b, c: Πλήθος των επιπέδων των παραγόντων A, B, C αντίστοιχα.

n: Πλήθος επαναλήψεων του σχεδιασμού.

$$SST = SSA + SSB + SSC + SSAB + SSAC + SSBC + SSABC + SSE$$

Αν $n = 0$, το $SSE = 0$ οι βαθμοί ελεύθερίας του SSE είναι 0 και δεν έχουμε *MSE*!

Τρόποι αντιμετώπισης τέτοιων καταστάσεων;

Προφανώς αν δεν μπορούμε να έχουμε σχεδιασμό με επαναλήψεις

15

Λίγο θεωρία – Η δημιουργία «ψευδοσφάλματος»

Βασιζόμαστε στις αρχές που διέπουν τις παραγοντικές επιδράσεις. Θυσιάζουμε αλληλεπιδράσεις μεγάλης τάξης, υποθέτοντας ότι είναι μη σημαντικές. Όλη η μεταβλητότητα που οφείλεται σε αυτές λοιπόν, αποδίδεται στο σφάλμα.

Π.χ. Θεωρούμε ότι η αλληλεπίδραση ABC είναι ασήμαντη, άρα δεν υπάρχει λόγος να ασχοληθούμε

$$SST = SSA + SSB + SSC + SSAB + SSAC + SSBC + \boxed{\cancel{SSABC} + SSE}$$

Π.χ. Θεωρούμε ότι όλες οι αλληλεπιδράσεις είναι ασήμαντες, άρα δεν υπάρχει λόγος να ασχοληθούμε

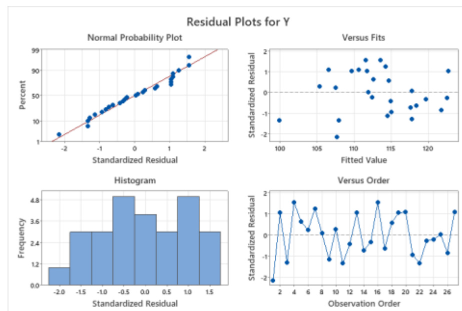
$$SST = SSA + SSB + SSC + \boxed{\cancel{SSAB} + \cancel{SSAC} + \cancel{SSBC} + \cancel{SSABC} + SSE}$$

16

Πείραμα 4 – Χρήση ψευδοσφάλματος (από αλληλεπίδραση $2^{ης}$ τάξης)

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Σπορος	2	474.30	237.148	14.64	0.002
Προμηθευτης	2	20.52	10.259	0.63	0.556
Ποσοτητα	2	72.07	36.037	2.22	0.171
Σπορος*Προμηθευτης	4	45.48	11.370	0.70	0.612
Σπορος*Ποσοτητα	4	36.59	9.148	0.56	0.696
Προμηθευτης*Ποσοτητα	4	143.70	35.926	2.22	0.157
Error	8	129.63	16.204		
Total	26	922.30			

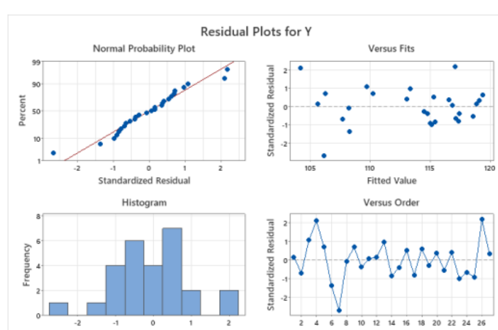


17

Πείραμα 4 – Χρήση ψευδοσφάλματος (από όλες τις αλληλεπιδράσεις)

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Σπορος	2	486.58	243.291	14.13	0.000
Προμηθευτης	2	18.47	9.236	0.54	0.593
Ποσοτητα	2	74.42	37.210	2.16	0.141
Error	20	344.39	17.219		
Total	26	923.86			



18

Λίγο θεωρία – Εντοπισμός βέλτιστων συνθηκών

Εκτελούνται διαδικασίες πολλαπλών συγκρίσεων των επιπέδων ανά δύο.

Αν δεν υπάρχουν σημαντικές αλληλεπιδράσεις, τότε γίνεται άμεσα, στα επίπεδα των παραγόντων που βρέθηκαν σημαντικές οι κύριες επιδράσεις τους.

Αν υπάρχουν σημαντικές αλληλεπιδράσεις όμως, τότε η διαδικασία γίνεται λίγο πιο σύνθετη (σταθεροποιούμε παράγοντες σε συγκεκριμένα επίπεδα πριν εκτελέσουμε τις πολλαπλές συγκρίσεις στα επίπεδα κάποιου άλλου παράγοντα).

Εντοπισμός βέλτιστων συνθηκών

Tukey Pairwise Comparisons: Σπορος

Grouping Information Using the Tukey Method

Σπορος	N	Mean	Grouping	
B	9	116.444	A	
C	9	116.222	A	
A	9	107.444		B

Means that do not share a letter are significantly different.

19

Ανάλυση με χρήση μοντέλων παλινδρόμησης

Για τον έλεγχο συγκεκριμένων υποθέσεων που αφορούν επιδράσεις.

20

Λίγο θεωρία

Γίνεται με τη χρήση **βωβών μεταβλητών (dummy variables)** οι οποίες συνήθως δημιουργούνται για τον έλεγχο ενός συνόλου συγκεκριμένων υποθέσεων (πολλές φορές πολύπλοκων) – μία για κάθε υπόθεση. Ανάλογα με τη σύγκριση επιδράσεων (ή μέσων, ισοδύναμα) που θέλουμε να γίνει προκύπτουν αντίστοιχα και οι τιμές που θα χρησιμοποιηθούν ως συντελεστές των μετρήσεων στη βωβή μεταβλητή (οι συντελεστές αθροίζουν στο 0, και οι βωβές μεταβλητές ονομάζονται και **αντιθέσεις**).

Για ελέγχους που αφορούν επιδράσεις κάποιου παράγοντα που μελετάται σε α επίπεδα, γίνεται να χρησιμοποιηθούν μέχρι και α–1 βωβές μεταβλητές.

Συνήθως «ενεργοποιούνται» όλες οι βωβές μεταβλητές για κάθε παράγοντα, όπως και αυτές που προκύπτουν ως αλληλεπιδράσεις, από τα γινόμενα των βωβών μεταβλητών που χρησιμοποιούνται για τους «γονείς» των αλληλεπιδράσεων (χωρίς να είναι απαραίτητο πάντα να προκύπτει και κάτι χρήσιμο από αυτές).

Δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο ένας πίνακας μοντέλου (model matrix) **X** και η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται με τη συνήθη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων.

21

Λίγο θεωρία

Ο n x (k+1) λοιπόν πίνακας **X** του μοντέλου

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

θα είναι ο

$$\mathbf{X} = [I : D]$$

όπου I είναι μία στήλη με μονάδες και D είναι ένας n x k πίνακας που προκύπτει από το σχεδιασμό και τις k βωβές μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_k$ που χρησιμοποιούμε. Η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται από τη σχέση

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}Y$$

και γίνεται μόνο αν ο πίνακας $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ αντιστρέφεται. Ο $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ λέγεται και **πίνακας πληροφορίας** του συγκεκριμένου μοντέλου.

22

Λίγο θεωρία

Προφανώς, η μορφή του πίνακα $\mathbf{X}$ και του $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ αλλάζει αν χρησιμοποιήσουμε άλλες βωβές μεταβλητές στον ίδιο σχεδιασμό.

Γενικά, όσο μεγαλύτερη ορίζουσα έχει ο πίνακας $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$, τόσο καλύτερη εκτίμηση γίνεται για το σύνολο των παραμέτρων που εξετάζονται. Η βέλτιστη κατάσταση επιτυγχάνεται όταν ο πίνακας $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ είναι διαγώνιος. Σε αυτή την περίπτωση οι εκτιμήσεις είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

Ο βαθμός ορθογωνιότητας του σχεδιασμού που χρησιμοποιούμε αλλά και οι βωβές μεταβλητές που δημιουργούμε, επηρεάζουν τη μορφή του πίνακα $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$.

Είναι εφικτό να έχουμε πάντα διαγώνιο πίνακα $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$;

23

Λίγο θεωρία

Είναι εφικτό να έχουμε πάντα διαγώνιο πίνακα $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$;

Γενικά, κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί αν χρησιμοποιούνται βωβές μεταβλητές που βασίζονται σε ορθογώνια πολυώνυμα και σχεδιασμοί με κατάλληλο βαθμό ορθογωνιότητας.

Όμως, οι υποθέσεις που ελέγχονται από βωβές μεταβλητές που προκύπτουν από ορθογώνια πολυώνυμα μπορεί να μην είναι εύκολο να ερμηνευτούν (και τις περισσότερες φορές δεν ενδιαφέρουν κιόλας…). Γενικά, αυτό συμβαίνει όταν έχουμε παράγοντες με αρκετά επίπεδα.

Αν όμως οι παράγοντες σε ένα πείραμα εξετάζονται σε δύο επίπεδα, τότε η μεθοδολογία αυτή γίνεται πολύ πιο απλή και εύκολα ερμηνεύσιμη και χρησιμοποιείται πολύ συχνά για συμπερασματολογία.

24

Λίγο θεωρία

Το γεγονός αυτό – στην περίπτωση που οι παράγοντες μελετώνται σε δύο επίπεδα – προκύπτει επειδή δεν υπάρχουν πολλές και διαφορετικές χρήσιμες επιλογές για τις βωβές μεταβλητές, παρά μόνο ΜΙΑ, αυτή που ουσιαστικά θα μας λέει πράγματα για την μεταβολή στην απόκριση αν από το ένα επίπεδο πάμε στο άλλο. Με άλλα λόγια, αυτό που επηρεάζει τη μορφή του πίνακα πληροφορίας $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ ενός συγκεκριμένου μοντέλου είναι ο μόνο ο σχεδιασμός που χρησιμοποιείται.

Έτσι λοιπόν, στην περίπτωση αυτή είναι ενδιαφέρον να εντοπίζουμε βέλτιστους σχεδιασμούς δοθέντος μοντέλου.

25

Παράδειγμα

Ένας γεωργός χρησιμοποιεί λίπασμα για τις καλιέργειές του. Στην αγορά βρίσκει 4 τύπους λιπάσματος, τον A, τον B, τον C και τον D. Οι τύποι A και B είναι ευρωπαϊκής προέλευσης ενώ οι C και D είναι αμερικανικής. Ενδιαφέρεται να μάθει αν τα λιπάσματα ευρωπαϊκής προέλευσης διαφέρουν μεταξύ τους, αν τα λιπάσματα αμερικανικής προέλευσης διαφέρουν μεταξύ τους και αν τα λιπάσματα ευρωπαϊκής προέλευσης διαφέρουν από τα αμερικανικής προέλευσης. Δοκιμάζει και τους 4 τύπους και κάνει 4 μετρήσεις από τον καθένα.

$$\mu_{\mathrm{A}} = \mu_{\mathrm{B}}$$
$$\mu_{\mathrm{C}} = \mu_{\mathrm{D}}$$
$$\mu_{\mathrm{A}} + \mu_{\mathrm{B}} = \mu_{\mathrm{C}} + \mu_{\mathrm{D}}$$

26

Παράδειγμα

Τύπος λιπάσματος			
A	B	C	D
120	134	142	147
124	135	144	142
118	137	139	145
123	129	143	141

$$\mu_A = \mu_B$$
$$\mu_C = \mu_D$$
$$\mu_A + \mu_B = \mu_C + \mu_D$$

$$1\mu_A - 1\mu_B + 0\mu_C + 0\mu_D = 0$$
$$0\mu_A + 0\mu_B + 1\mu_C - 1\mu_D = 0$$
$$1\mu_A + 1\mu_B - 1\mu_C - 1\mu_D = 0$$

Τιμές βωβών μεταβλητών			
	x1	x2	x3
Μέτρηση από A	**1**	**0**	**1**
Μέτρηση από B	**-1**	**0**	**1**
Μέτρηση από C	**0**	**1**	**-1**
Μέτρηση από D	**0**	**-1**	**-1**

27

Παράδειγμα

$$\begin{array}{c} \text{A}\\ \text{A}\\ \text{A}\\ \text{A}\\ \text{B}\\ \text{B}\\ \text{B}\\ \text{B}\\ \text{C}\\ \text{C}\\ \text{C}\\ \text{C}\\ \text{D}\\ \text{D}\\ \text{D}\\ \text{D} \end{array} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 120\\ 124\\ 118\\ 123\\ 134\\ 135\\ 137\\ 129\\ 142\\ 144\\ 139\\ 143\\ 147\\ 142\\ 145\\ 141 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \begin{matrix} 16 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{matrix}$$

28

Παράδειγμα

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	135.188	0.701	192.95	0.000	
x1	-6.250	0.991	-6.31	0.000	1.00
x2	-0.875	0.991	-0.88	0.395	1.00
x3	-7.688	0.701	-10.97	0.000	1.00

Τα λιπάσματα ευρωπαϊκής προέλευσης διαφέρουν μεταξύ τους,
Τα λιπάσματα αμερικανικής προέλευσης δεν διαφέρουν μεταξύ τους
Τα λιπάσματα ευρωπαϊκής προέλευσης διαφέρουν από τα αμερικανικής προέλευσης.

29

Παράδειγμα – Ένα άλλο σετ βωβών μεταβλητών

Τα στατιστικά πακέτα χρησιμοποιούν πάντα κάποιες τυπικές βωβές μεταβλητές και ουσιαστικά κάνουν την ανάλυση διασποράς με χρήση της παλινδρόμησης (υπάρχει εξάλλου άμεση σχέση) – εδώ φαίνεται το σετ που χρησιμοποιεί το MINITAB. Τι ελέγχουμε με αυτό το σετ;

$$
\begin{array}{c} A\\A\\A\\A\\B\\B\\B\\B\\C\\C\\C\\C\\D\\D\\D\\D \end{array}
\quad
Y = \begin{bmatrix} 120\\124\\118\\123\\134\\135\\137\\129\\142\\144\\139\\143\\147\\142\\145\\141 \end{bmatrix}
\quad
X = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1\\
1 & -1 & -1 & -1\\
1 & -1 & -1 & -1\\
1 & -1 & -1 & -1\\
1 & -1 & -1 & -1
\end{bmatrix}
$$

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	135.188	0.701	192.95	0.000	
x1	-13.94	1.21	-11.49	0.000	1.50
x2	-1.44	1.21	-1.18	0.259	1.50
x3	6.81	1.21	5.61	0.000	1.50

$$
X^T X = \begin{array}{cccc}
16 & 0 & 0 & 0\\
0 & 8 & 4 & 4\\
0 & 4 & 8 & 4\\
0 & 4 & 4 & 8
\end{array}
$$

30

Παράδειγμα – Συγκρίσεις των 2 σετ

Τιμές βωβών μεταβλητών			
	x1	x2	x3
Μέτρηση από A	1	0	1
Μέτρηση από B	-1	0	1
Μέτρηση από C	0	1	-1
Μέτρηση από D	0	-1	-1

Τιμές βωβών μεταβλητών			
	z1	z2	z3
Μέτρηση από A	1	0	0
Μέτρηση από B	0	1	0
Μέτρηση από C	0	0	1
Μέτρηση από D	-1	-1	-1

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{matrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{matrix}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{matrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{matrix}$$

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	135.188	0.701	192.95	0.000	
x1	-6.250	0.991	-6.31	0.000	1.00
x2	-0.875	0.991	-0.88	0.395	1.00
x3	-7.688	0.701	-10.97	0.000	1.00

Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	135.188	0.701	192.95	0.000	
x1	-13.94	1.21	-11.49	0.000	1.50
x2	-1.44	1.21	-1.18	0.259	1.50
x3	6.81	1.21	5.61	0.000	1.50

Με το σετ x1, x2, x3 οι εκτιμήσεις είναι ασυσχέτιστες (και οι έλεγχοι)
Με το σετ z1, z2, z3 όχι!
Προφανώς, κάθε σετ ελέγχει άλλες υποθέσεις!

31

Και μια πιο γενική περίπτωση! Ο πίνακας μοντέλου για το Πείραμα 4 από το MINITAB. Πώς φτιάχτηκε;

X=

																											Σπορος	Προμηθευτης	Ποσοτητα	Y
1	1	0	0	1	-1	-1	0	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	A	Π2	2.0	103
1	1	0	1	0	-1	-1	1	0	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	A	Π1	2.0	114
1	0	1	-1	-1	0	1	0	0	-1	-1	0	0	0	1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	B	Π3	1.5	115
1	-1	-1	0	1	-1	-1	0	-1	0	-1	1	1	1	1	0	0	-1	-1	0	0	1	1	0	0	1	1	C	Π2	2.0	115
1	-1	-1	1	0	1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	C	Π1	1.0	114
1	1	0	-1	-1	0	1	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	A	Π3	1.5	108
1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	B	Π1	1.5	117
1	-1	-1	1	0	0	1	-1	0	-1	0	0	-1	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	C	Π1	1.5	118
1	-1	-1	0	1	0	1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	C	Π2	1.5	112
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	A	Π1	1.0	106
1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	A	Π1	1.5	105
1	-1	-1	0	1	1	0	0	-1	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	C	Π2	1.0	114
1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	A	Π2	1.0	112
1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	0	-1	0	1	1	1	1	-1	-1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	C	Π1	2.0	116
1	0	1	1	0	-1	-1	0	0	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	B	Π1	2.0	119
1	0	1	-1	-1	1	0	0	0	-1	-1	0	0	1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	B	Π3	1.0	117
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	B	Π2	1.0	117
1	0	1	0	1	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	B	Π2	2.0	116
1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	1	0	1	0	1	0	1	C	Π3	1.5	125
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	A	Π2	1.5	109
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	B	Π1	1.0	113
1	1	0	-1	-1	1	0	-1	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	A	Π3	1.0	97
1	0	1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	B	Π3	2.0	122
1	-1	-1	-1	-1	1	0	1	1	1	1	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	C	Π3	1.0	112
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	B	Π2	1.5	112
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	C	Π3	2.0	120
1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	A	Π3	2.0	113

32

Κάποια (κλασσικά) σύνολα αντιθέσεων

a=2	
1ο	2ο
-1	1

a=3		
1ο	2ο	3ο
-1	0	1
1	-2	1

a=4				
1ο	2ο	3ο	4ο	
-3	-1	1	3	x1 γραμμική
1	-1	-1	1	x2 τετραγωνική
-1	3	-3	1	x3 κυβική

a=5				
1ο	2ο	3ο	4ο	5ο
-2	-1	0	1	2
2	-1	-2	-1	2
-1	2	0	-2	1
1	-4	6	-4	1

a=6						
1ο	2ο	3ο	4ο	5ο	6ο	
-5	-3	-1	1	3	5	x1 γραμμική
5	-1	-4	-4	-1	5	x2 τετραγωνική
-5	7	4	-4	-7	5	x3 κυβική
1	-3	2	2	-3	1	x4 4ης τάξης
-1	5	-10	10	-5	1	x5 5ης τάξης

Δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούνται πάντα αυτές, αν και είναι μια εύκολη «λύση». Π.χ αν τα επίπεδα ενός παράγοντα είναι *a*=4, το σετ που είδαμε

a=4			
1ο	2ο	3ο	4ο
1	-1	0	0
0	0	1	-1
1	1	-1	-1

ή και το

a=4			
1ο	2ο	3ο	4ο
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1

«ελέγχει» πιο ενδιαφέρουσες υποθέσεις. Γενικά, αν το *a* είναι δύναμη του 2, υπάρχουν πιο «ενδιαφέροντα» σετ, όπως τα παραπάνω.

33

Οι 2^k Παραγοντικοί σχεδιασμοί

34

Μια σημαντική κατηγορία πειραμάτων προκύπτει από καταστάσεις όπου μελετάμε *k* παράγοντες και εξετάζουμε δύο μόνο επίπεδα για τον καθένα.

Μια **πλήρης επανάληψη** ενός τέτοιου σχεδιασμού απαιτεί $2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^k$ συνολικά μετρήσεις και λέγεται 2^k παραγοντικός σχεδιασμός.

Τα 2^k παραγοντικά πειράματα είναι πολύ αποδοτικά γιατί επιτρέπουν τη διερεύνηση πολλών παραγόντων με χρήση ενός σχετικά μικρού αριθμού δοκιμών.

Λόγω της ύπαρξης μόνο δύο επιπέδων, οι συμβολισμοί, οι υπολογισμοί και η ερμηνεία των αποτελεσμάτων είναι απλούστεροι σε σχέση με εκείνους των (γενικών) πλήρων παραγοντικών πειραμάτων.

35

Συμβολισμοί:
Παράγοντες: Συνήθως με χρήση *k* κεφαλαίων λατινικών γραμμάτων (*A*, *B*, *C* κλπ)
Επίπεδα παραγόντων: Επειδή εξετάζουμε τους παράγοντες σε 2 μόνο επίπεδα, θεωρούμε το ένα ως «χαμηλό» και το άλλο ως «υψηλό». Για το χαμηλό επίπεδο συνήθως χρησιμοποιούμε το « $-$ » και για το υψηλό το « + ».
Παραγοντικές επιδράσεις: Με κεφαλαία λατινικά γράμματα (επίσης) (*A*, *B*, *C* κλπ), χωρίς να υπάρχει κίνδυνος παρανόησης.
Π.χ.
A, η κύρια επίδραση του παράγοντα *A*
AB, η αλληλεπίδραση των παραγόντων *A* και *B*
Θεραπείες: Με μια «λέξη» πεζών λατινικών γραμμάτων που σχηματίζεται ως εξής:
Αν στη θεραπεία εξετάζουμε κάποιον παράγοντα στο υψηλό του επίπεδο, τότε γράφουμε στη λέξη το αντίστοιχο πεζό λατινικό γράμμα, αλλιώς τίποτα.
Αριθμός επαναλήψεων του πλήρους 2^k σχεδιασμού: n
Παρατήρηση: όταν $n = 1$ έχουμε μια μόνο επανάληψη του 2^k σχεδιασμού ή έναν μη επαναλαμβανόμενο 2^k σχεδιασμό.

36

Ο 2^3 Παραγοντικός σχεδιασμός

3 παράγοντες A, B και C, με 2 επίπεδα ο καθένας

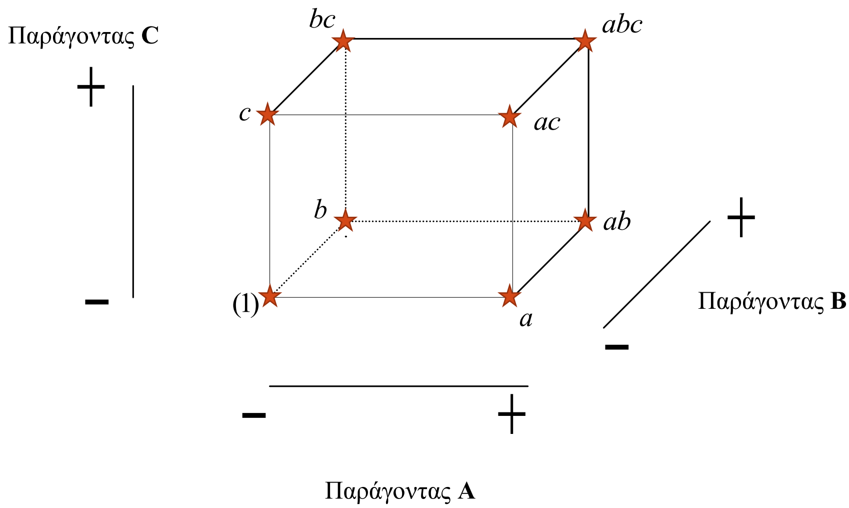
37

Ένα παράδειγμα

Ένας γεωργός θέλει να μελετήσει την επίδραση που έχει η ποσότητα τριών λιπασμάτων που χρησιμοποιεί ταυτόχρονα στην καλιέργειά του, στο ύψος της τελικής του παραγωγής. Οι παράγοντες (Λίπασμα A, Λίπασμα B και Λίπασμα C) εξετάζονται σε δύο επίπεδα ο καθένας και συγκεκριμένα ο *A* στις τιμές 100 και 150 Kg, ο *B* στις τιμές 250 και 300 Kg και ο *C* στις τιμές 200 και 250 Kg.

Σχεδιασμός									
A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	
100	250	200	χαμηλή	χαμηλή	χαμηλή	-	-	-	(1)
150	250	200	υψηλή	χαμηλή	χαμηλή	+	-	-	*a*
100	300	200	χαμηλή	υψηλή	χαμηλή	-	+	-	*b*
150	300	200	υψηλή	υψηλή	χαμηλή	+	+	-	*ab*
100	250	250	χαμηλή	χαμηλή	υψηλή	-	-	+	*c*
150	250	250	υψηλή	χαμηλή	υψηλή	+	-	+	*ac*
100	300	250	χαμηλή	υψηλή	υψηλή	-	+	+	*bc*
150	300	250	υψηλή	υψηλή	υψηλή	+	+	+	*abc*

38

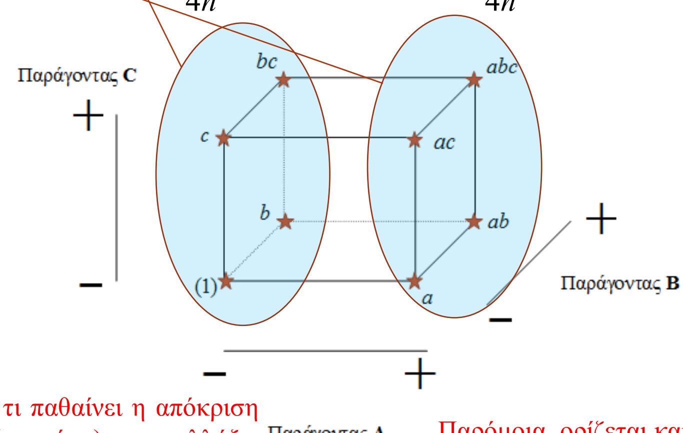


39

Οι κύριες επιδράσεις

Η κύρια επίδραση ενός παράγοντα ορίζεται σαν η διαφορά των μέσων αποκρίσεων που αντιστοιχούν στα δύο επίπεδά του. Π.χ.

$$A = \bar{Y}_{A+} - \bar{Y}_{A-} = \frac{1}{4n}(a + ab + ac + abc) - \frac{1}{4n}(b + c + bc + (1))$$



Μας λέει τι παθαίνει η απόκριση (κατά μέσο όρο) αν αλλάξει επίπεδο ο παράγοντας

Παρόμοια, ορίζεται και η ερμηνεία των αλληλεπιδράσεων

40

Τύποι υπολογισμού των επιδράσεων

Βάσιζονται σε συγκεκριμένους γραμμικούς συνδυασμούς των αποκρίσεων που λαμβάνονται από κάθε θεραπεία. Οι συντελεστές αθροίζουν στο 0 και γι' αυτό καλούνται και **αντιθέσεις**.

$$l_A = [-(1) + a - b + ab - c + ac - bc + abc]$$

$$l_B = [-(1) - a + b + ab - c - ac + bc + abc]$$

$$l_C = [-(1) - a - b - ab + c + ac + bc + abc]$$

$$l_{AB} = [(1) - a - b + ab + c - ac - bc + abc]$$

$$l_{AC} = [(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc]$$

$$l_{BC} = [(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc]$$

$$l_{ABC} = [(1) + a + b - ab + c - ac - bc + abc]$$

41

Πίνακας Αλγεβρικών Προσήμων

Οι συντελεστές των αντιθέσεων προκύπτουν εύκολα από τον πίνακα αλγεβρικών προσήμων του σχεδιασμού.

A	*B*	*C*	*I*	*A*	*B*	*AB*	*C*	*AC*	*BC*	*ABC*	
-	-	-	+	-	-	+	-	+	+	-	**(1)**
+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	***a***
-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	***b***
+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-	***ab***
-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	***c***
+	-	+	+	+	-	-	+	+	-	-	***ac***
-	+	+	+	-	+	-	+	-	+	-	***bc***
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	***abc***

42

Επιδράσεις και ANOVA

$XXX = \frac{1}{4n} l_{XXX}$ ⟷ n αριθμός επαναλήψεων ⟷ $SS\ XXX = \frac{1}{8n}(l_{xxx})^2$

Source	SS	DF	MS	F
A	*SSA*	1	*SSA* / 1	*MSA/MSE*
B	*SSB*	1	*SSB* / 1	*MSB/MSE*
C	*SSC*	1	*SSC* / 1	*MSC/MSE*
AB	*SSAB*	1	*SSAB* / 1	*MSAB/MSE*
AC	*SSAC*	1	*SSAC* / 1	*MSAC/MSE*
BC	*SSBC*	1	*SSBC* / 1	*MSBC/MSE*
ABC	*SSABC*	1	*SSABC* / 1	*MSABC/MSE*
Error	*SSE*	8(*n* - 1)	*SSE* / 8(*n*-1)	
Total	*SST*	8*n* - 1		

43

Το Μοντέλο Παλινδρόμησης

44

Εκτός από την εκτίμηση και την αξιολόγηση των επιδράσεων σε ένα 2^k παραγοντικό πολλές φορές θέλουμε να προσδιορίσουμε ένα μοντέλο με βάση το οποίο να μπορούμε να προβλέψουμε την απόκριση ή να εκτιμήσουμε τη μέση απόκριση για οποιεσδήποτε τιμές των (ποσοτικών) παραγόντων ανάμεσα στα επίπεδα τα οποία εξετάσαμε.
Για το 2^3 παραγοντικό πείραμα, προσαρμόζουμε το μοντέλο

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1 x_2 + \beta_5 x_1 x_3 + \beta_6 x_2 x_3 + \beta_7 x_1 x_2 x_3 + \varepsilon$$

όπου:
X_1 είναι μια βωβή μεταβλητή με τιμές +1 και –1 για τον παράγοντα A (υψηλή–χαμηλή)
X_2 είναι μια βωβή μεταβλητή με τιμές +1 και –1 για τον παράγοντα B
και
X_3 είναι μια βωβή μεταβλητή με τιμές +1 και –1 για τον παράγοντα C
Οι βωβές μεταβλητές για τις αλληλεπιδράσεις προκύπτουν από το γινόμενο των τιμών των «γονέων» της εκάστοτε αλληλεπίδρασης.
Ουσιαστικά, ο πίνακας X του μοντέλου είναι ο **πίνακας αλγεβρικών προσήμων** (επαναλαμβανόμενος n φορές για καθεμιά από τις επαναλήψεις του 2^3 παραγοντικού, αν υπάρχουν).

45

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ο πίνακας πληροφορίας του μοντέλου είναι ο

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \boldsymbol{8nI_8}$$

Με τη χρήση λοιπόν των συγκεκριμένων βωβών μεταβλητών (αντιθέσεων) αποφεύγεται η σύγχιση των επιδράσεων. Θυμίζω εξ’ αλλου ότι ο σχεδιασμός μας είναι πλήρης.

Αποδεικνύεται ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι ίσες με το μισό των εκτιμήσεων των παραγοντικών επιδράσεων. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση της αποκριτικής επιφάνειας, χωρίς καν να κάνουμε παλινδρόμηση!

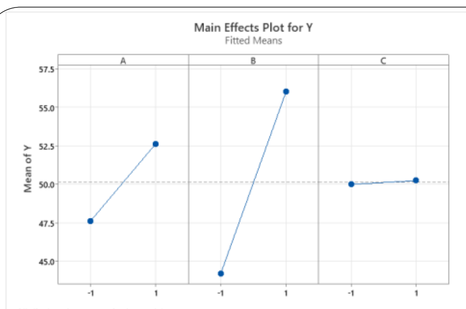
46

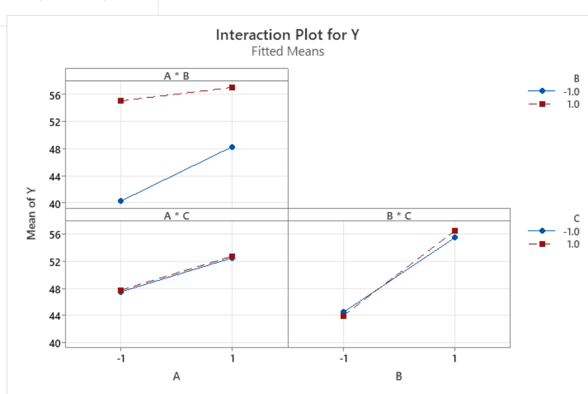
Παράδειγμα

Ένας γεωργός θέλει να μελετήσει την επίδραση που έχει η ποσότητα τριών λιπασμάτων που χρησιμοποιεί ταυτόχρονα στην καλιέργειά του, στο ύψος της τελικής του παραγωγής. Οι παράγοντες (Λίπασμα Α, Λίπασμα Β και Λίπασμα C) εξετάζονται σε δύο επίπεδα ο καθένας και συγκεκριμένα ο *A* στις τιμές 100 και 150 Kg, ο *B* στις τιμές 250 και 300 Kg και ο *C* στις τιμές 200 και 250 Kg. Για κάθε θεραπεία κάνει 2 επαναλήψεις.

Σχεδιασμός											
A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*			
100	250	200	χαμηλή	χαμηλή	χαμηλή	-	-	-	(1)=81	39	42
150	250	200	υψηλή	χαμηλή	χαμηλή	+	-	-	*a*=97	49	48
100	300	200	χαμηλή	υψηλή	χαμηλή	-	+	-	*b*=109	55	54
150	300	200	υψηλή	υψηλή	χαμηλή	+	+	-	*ab*=113	57	56
100	250	250	χαμηλή	χαμηλή	υψηλή	-	-	+	*c*=80	39	41
150	250	250	υψηλή	χαμηλή	υψηλή	+	-	+	*ac*=96	49	47
100	300	250	χαμηλή	υψηλή	υψηλή	-	+	+	*bc*=111	55	56
150	300	250	υψηλή	υψηλή	υψηλή	+	+	+	*abc*=115	57	58

47





48

Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value
Constant		50.125	0.293	170.99	0.000
A	5.000	2.500	0.293	8.53	0.000
B	11.750	5.875	0.293	20.04	0.000
C	0.250	0.125	0.293	0.43	0.681 ⟵
A*B	-3.000	-1.500	0.293	-5.12	0.001
A*C	0.000	0.000	0.293	0.00	1.000 ⟵
B*C	0.750	0.375	0.293	1.28	0.237 ⟵
A*B*C	-0.000	-0.000	0.293	-0.00	1.000 ⟵

Regression Equation

$$Y = 50.125 + 2.500\ A + 5.875\ B + \cancel{0.125\ C} - 1.500\ A*B + \cancel{0.000\ A*C} + \cancel{0.375\ B*C} - \cancel{0.000\ A*B*C}$$

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
A	1	100.000	100.000	72.73	0.000
B	1	552.250	552.250	401.64	0.000
C	1	0.250	0.250	0.18	0.681
A*B	1	36.000	36.000	26.18	0.001
A*C	1	0.000	0.000	0.00	1.000
B*C	1	2.250	2.250	1.64	0.237
A*B*C	1	0.000	0.000	0.00	1.000
Error	8	11.000	1.375		
Total	15	701.750			

49

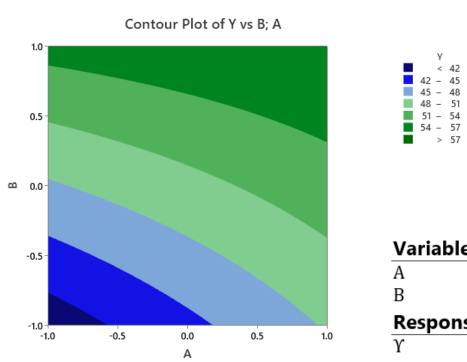
Πως μπορεί να μεγιστοποιηθεί η απόκριση;

$$Y = 50.125 + 2.500\ A + 5.875\ B - 1.500\ A*B$$

Το λίπασμα A στο +1 (δηλαδή 150 κιλά)

Το λίπασμα B στο +1 (δηλαδή 300 κιλά)

Το λίπασμα C αδιάφορο



Variable	Setting
A	1
B	1

Response	Fit	SE Fit	95% CI	95% PI
Y	57.000	0.530	(55.845; 58.155)	(54.416; 59.584)

50

Ο (γενικός) 2^k Παραγοντικός σχεδιασμός

k παράγοντες, με 2 επίπεδα ο καθένας

51

Η μέθοδος ανάλυσης που παρουσιάστηκε για τον 2^3 παραγοντικό σχεδιασμό μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση ενός 2^k παραγοντικού σχεδιασμού με *k* παράγοντες καθέναν σε δύο επίπεδα.

Στον 2^k σχεδιασμό υπάρχουν:

k κύριες επιδράσεις,

$\binom{k}{2}$ αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων,

$\binom{k}{3}$ αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων

, . . . ,

και

μια αλληλεπίδραση *k* παραγόντων.

Δηλαδή, για έναν 2^k σχεδιασμό το πλήρες μοντέλο παλινδρόμησης θα περιέχει 2^k-1 επιδράσεις.

52

Ο συμβολισμός που εισάγαμε προηγουμένως για τους συνδυασμούς επιπέδων των παραγόντων χρησιμοποιείται επίσης και εδώ.

Για παράδειγμα, σε έναν 2^5 σχεδιασμό το *abd* συμβολίζει τον συνδυασμό με τους παράγοντες *A*, *B* και *D* στην υψηλή στάθμη και τους παράγοντες *C* και *E* στη χαμηλή στάθμη.

Οι συνδυασμοί αγωγών μπορούν να γραφούν στην τυπική διάταξη εισάγοντας τους παράγοντες έναν κάθε φορά, με κάθε νέο παράγοντα να συνδυάζεται με όλους όσους προηγούνται από αυτόν. Για παράδειγμα η τυπική διάταξη για έναν 2^4 σχεδιασμό είναι :

(1), *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd* και *abcd*.

Για να εκτιμήσουμε μια επίδραση ή να υπολογίσουμε το άθροισμα τετραγώνων για μια επίδραση, πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε την αντίθεση που αντιστοιχεί σε αυτήν την επίδραση. Αυτό μπορεί να γίνει πάντοτε χρησιμοποιώντας έναν πίνακα προσήμων.

53

Για μεγάλες τιμές του *k* ο πίνακας προσήμων δεν είναι βολικό να κατασκευαστεί και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια εναλλακτική μέθοδο. Προσδιορίζουμε την αντίθεση για την αλληλεπίδραση *AB…K* αναπτύσσοντας το δεξιό μέρος της:

$$l_{AB\ldots K} = (a \pm 1)(b \pm 1)\cdots(k \pm 1)$$

χρησιμοποιώντας άλγεβρα, όπου στην τελική έκφραση αντικαθιστούμε το “1” με το (1).

Το πρόσημο σε κάθε σύνολο παρενθέσεων είναι αρνητικό αν ο παράγοντας συμπεριλαμβάνεται στην αλληλεπίδραση και θετικό αν ο παράγοντας δεν συμπεριλαμβάνεται.

Π.χ. στον 2^3 παραγοντικό σχεδιασμό, η αντίθεση για την αλληλεπίδραση *AB* θα είναι

$$l_{AB} = (a-1)(b-1)(c+1) = (ab-a-b+1)(c+1) =$$
$$= abc + ab - ac - a - bc - b + c + (1)$$

Όταν υπολογισθούν οι αντιθέσεις, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις επιδράσεις και να υπολογίσουμε τα αθροίσματα τετραγώνων σύμφωνα με τις

$$AB\ldots K = \frac{2}{n2^k} l_{AB\ldots K} \qquad SS_{AB\ldots K} = \frac{1}{n2^k} l^2_{AB\ldots K}$$

αντίστοιχα, όπου το *n* συμβολίζει τον αριθμό των επαναλήψεων.

54

Βιβλιογραφία

A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane and J. Stufken, *Orthogonal Arrays: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

D. C. Montgomery, *Design and analysis of experiments*, 5th ed., Wiley, New York, 2004.

C. F. J. Wu and M. Hamada, *Experiments: Planning, Analysis, and Parameter Design Optimization*, 2nd ed., Wiley, New York, 2009.

55