

## Σχεδιασμοί Πειραμάτων: Κατασκευές και Εφαρμογές

Χ. Ευαγγελάρας

*Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης  
Πανεπιστήμιο Πειραιώς*

1

### Πείραμα

Παρατήρηση (ή καλύτερα μέτρηση) της τιμής μιας μεταβλητής που ενδιαφέρει, όταν καποιες άλλες **πλήρως ελεγχόμενες** από τον πειραματιστή (χρήστη) μεταβλητές έχουν προμελετημένα λάβει συγκεκριμένες τιμές.

### Σκοπός

Η συστηματική μελέτη των επιδράσεων που ασκούν οι **ελεγχόμενες** μεταβλητές στη (μη ελεγχόμενη) μεταβλητή που μας ενδιαφέρει.

2

## Σχεδιασμός Πειραμάτων

Η διαδικασία μέσω της οποίας αρχικά θα αναγνωρίσουμε όλες τις μεταβλητές ενδιαφέροντος (ελεγχόμενες και μη), μετά θα αποφασίσουμε το πλήθος των μετρήσεων που θέλουμε να πραγματοποιήσουμε και στη συνέχεια, θα ορίσουμε τις τιμές των ελεγχόμενων μεταβλητών για να πραγματοποιηθεί καθεμία μέτρηση της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει.

3

## Βασικές έννοιες - Ορολογία

- **Μεταβλητή απόκρισης:** Η μεταβλητή που μας ενδιαφέρει να μάθουμε αν και πως επηρεάζεται από κάποιες ελεγχόμενες μεταβλητές. Οι τιμές της μεταβλητής απόκρισης – που αποτελούν και τα δεδομένα μας – είναι το αποτέλεσμα που μετριέται σε ένα πείραμα.
- **Παράγοντες:** Είναι οι ελεγχόμενες μεταβλητές (μπορεί να είναι ποιοτικές ή και ποσοτικές) που θέλουμε να μάθουμε αν και πως επιδρούν στη μεταβλητή απόκριση. Οι τιμές / καταστάσεις των παραγόντων μεταβάλλονται προμελετημένα από τον πειραματιστή, ώστε να εξεταστεί αν αυτές οι μεταβολές επηρεάζουν τη μεταβλητή απόκριση.

4

## Βασικές έννοιες - Ορολογία

- **Επίπεδο ή στάθμη ενός παράγοντα:** Η τιμή / κατάσταση που επιλέγεται να εξεταστεί ένας παράγοντας.
- **Θεραπεία ή αγωγή (treatment):** Κάθε συνδυασμός επιπέδων των παραγόντων που εξετάζονται σε ένα πείραμα.

*Το σύνολο των θεραπειών (n) που αποφασίζεται να χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη k παραγόντων αποτελεί ουσιαστικά και τον πειραματικό σχεδιασμό [Γενικά, δεν είναι υποχρεωτικό να είναι όλες διαφορετικές].*

*Η παρουσίαση του σχεδιασμού γίνεται με τη χρήση ενός  $n \times k$  πίνακα, στον οποίο κάθε γραμμή είναι και μία από τις θεραπείες (καλείται και εκτέλεση - run). Κάθε στήλη αντιστοιχεί και σε έναν από τους k παράγοντες, και σε αυτή φαίνεται σε ποιο επίπεδο συμμετέχει ο καθένας τους σε κάθε θεραπεία.*

5

- **Πειραματική μονάδα:** Το αντικείμενο στο οποίο εφαρμόζεται κάποια θεραπεία και παρατηρείται η μεταβλητή απόκρισης.
- **Επίδραση στη μεταβλητή απόκρισης:** Η παρατηρούμενη μεταβολή της μεταβλητής απόκρισης, καθώς μεταβάλλονται οι θεραπείες. Γενικά, ενδιαφέρει η μελέτη των **κύριων επιδράσεων** των παραγόντων καθώς και των **αλληλεπιδράσεών** τους.
- **Πειραματικό σφάλμα:** Η μεταβλητότητα της μεταβλητής απόκρισης, η οποία δεν μπορεί να αποδοθεί σε αλλαγή θεραπείας (δηλαδή σε κάποια παραγοντική επίδραση).
- **Μεταβλητή πλαισίου (blocking variable):** Μια ελεγχόμενη από τον πειραματιστή μεταβλητή, η οποία ενδέχεται να (ή και γνωρίζουμε ότι) επηρεάζει τη μεταβλητή απόκρισης, όμως δεν είναι ενδιαφέρουσα να μελετηθεί ως παράγοντας και τίθεται υπό έλεγχο για να εξαφανιστεί η επίδρασή της.

6

## Μερικά παραδείγματα πειραματισμού

Μπορείτε να αναγνωρίσετε τη μεταβλητή απόκρισης, τους παράγοντες, τις μεταβλητές πλαισίου και τα επίπεδά τους;

7

### Πείραμα 1

Ένας χρήστης του διαδικτύου θέλει να διερευνήσει αν ο τύπος του καλωδίου που χρησιμοποιεί για να συνδέσει τον υπολογιστή του με το modem επηρεάζει σημαντικά το χρόνο που απαιτείται για να «κατέβει» ένα αρχείο δεδομένων τύπου txt και μεγέθους 650 MB. Τα διαθέσιμα στην αγορά καλώδια είναι 5 τύπων. Αποφασίζει να μελετήσει και τους 5 τύπους.

8

### **Πείραμα 2**

Ένας χρήστης του διαδικτύου θέλει να διερευνήσει αν ο τύπος του καλωδίου που χρησιμοποιεί για να συνδέσει τον υπολογιστή του με το modem επηρεάζει σημαντικά το χρόνο που απαιτείται για να «κατέβει» ένα αρχείο δεδομένων τύπου txt και μεγέθους 650 MB. Λόγω της εμπειρίας του, γνωρίζει ότι το λειτουργικό σύστημα του υπολογιστή του επηρεάζει το χρόνο κατεβάσματος λόγω των διαφορετικών πρωτοκόλλων που χρησιμοποιούνται. Τα διαθέσιμα καλώδια είναι 5 τύπων. Αποφασίζει να χρησιμοποιήσει και τους 5 τύπους, ελέγχοντάς τους και στα δύο λειτουργικά συστήματα που χρησιμοποιεί στο PC του (Windows, Linux).

9

### **Πείραμα 3**

Ένας χρήστης του διαδικτύου θέλει να διερευνήσει αν ο τύπος του καλωδίου που χρησιμοποιεί για να συνδέσει τον υπολογιστή του με το modem όπως και το λειτουργικό σύστημα που έχει ενεργό, επηρεάζουν σημαντικά το χρόνο που απαιτείται για να «κατέβει» ένα αρχείο δεδομένων τύπου txt και μεγέθους 650 MB. Τα διαθέσιμα καλώδια είναι 5 τύπων. Αποφασίζει να χρησιμοποιήσει και τους 5 τύπους, ελέγχοντάς τους και στα δύο λειτουργικά συστήματα που χρησιμοποιεί στο PC του (Windows, Linux).

10

### Πείραμα 4

Ένας χρήστης του διαδικτύου θέλει να διερευνήσει αν ο τύπος του καλωδίου καθώς και το μήκος του καλωδίου που χρησιμοποιεί για να συνδέσει τον υπολογιστή του με το modem επηρεάζει σημαντικά το χρόνο που απαιτείται για να «κατέβει» ένα αρχείο δεδομένων τύπου txt και μεγέθους 650 MB. Τα διαθέσιμα καλώδια είναι 5 τύπων και κάθε τύπος καλωδίου πωλείται σε 2, 5 και 10 μέτρα. Χρησιμοποιεί και τους 5 τύπους και σε κάθε διαθέσιμο μήκος.

11

### Αρχές πειραματικού σχεδιασμού

- **Τυχαιοποίηση:** Τυχαία κατανομή πειραματικών μονάδων στις θεραπείες και τυχαία σειρά εκτέλεσης των θεραπειών.
- **Επανάληψη:** Επαναληπτική μέτρηση της μεταβλητής απόκρισης για κάθε θεραπεία. Η επανάληψη μας βοηθά στην ανεξάρτητη εκτίμηση του πειραματικού σφάλματος, δομικού στοιχείου της στατιστικής ανάλυσης των πειραματικών δεδομένων.
- **Ομαδοποίηση:** Έλεγχος των μεταβλητών πλαισίου, εφόσον προφανώς ενδείκνυται η χρήση τους.

12

## Η ανάλυση των δεδομένων

### Ανάλυση διασποράς

Η συνολική μεταβλητότητα ( $SST$ ) των παρατηρήσεων διασπάται

1. στις μεταβλητότητες που οφείλονται σε παραγοντικές επιδράσεις ( $SS_{xxx}$ )

και

2. στη μεταβλητότητα που δεν μπορεί να αποδοθεί σε παραγοντικές επιδράσεις και οφείλεται σε τυχαία σφάλματα ( $SSE$ ).

$$SST = (SS_A + SS_B + SS_{AB} + \dots + SS_K) + SSE$$

13

## Η ανάλυση των δεδομένων

### Ανάλυση διασποράς

Ακολουθεί εκτέλεση στατιστικών ελέγχων υποθέσεων σχετικών με την ύπαρξη μη μηδενικών επιδράσεων των παραγόντων.

### Ανάλυση παλινδρόμησης

Χρήση γραμμικών μοντέλων για τη μοντελοποίηση της απόκρισης (ιδιαίτερα συχνή όταν οι παράγοντες είναι ποσοτικοί).

**Η ανάλυση καταλήγει στον εντοπισμό της «βέλτιστης» θεραπείας, αυτές τις ρυθμίσεις δηλαδή των παραγόντων με τις οποίες επιτυγχάνεται αυτό που επιθυμούμε για την απόκριση.**

14

## Κατηγορίες παραγοντικών σχεδιασμών

### Πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί

Στην περίπτωση που πραγματοποιούμε όλες τις δυνατές θεραπείες που δημιουργούνται από τους διαφορετικούς συνδυασμούς των επιπέδων των υπό μελέτη παραγόντων, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε τον **πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό**.

Ο πλήρης παραγοντικός σχεδιασμός (δοθέντος πλήθους παραγόντων και επιπέδων αυτών) είναι **μοναδικός**.

15

## Κατηγορίες παραγοντικών σχεδιασμών

### Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί

Στην περίπτωση που πραγματοποιούμε ένα υποσύνολο όλων των δυνατών θεραπειών που δημιουργούνται από τους διαφορετικούς συνδυασμούς των επιπέδων των υπό μελέτη παραγόντων, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε έναν **κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό**.

Προφανώς, μπορεί κάποιος να σχηματίσει πολλούς και (ίσως) διαφορετικούς κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς, ανάλογα με το ποιες θεραπείες αποφασίζει να πραγματοποιήσει.

16



## Πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί

### Πλεονεκτήματα

Η κατασκευή του είναι **εύκολη** και **πάντα εφικτή**.

Έχουμε **ανεξάρτητη εκτίμηση** όλων των παραγοντικών επιδράσεων. Μπορούμε να κάνουμε ελέγχους σημαντικότητας για όλες τις επιδράσεις, αρκεί να μπορεί να γίνει εκτίμηση του πειραματικού σφάλματος (επανάληψη).

### Μειονεκτήματα

**Μη οικονομικοί**, γενικά, σχεδιασμοί. Μεγάλο πλήθος θεραπειών, ιδιαίτερα όταν εξετάζονται πολλοί παράγοντες και σε αρκετά επίπεδα ο καθένας.

Μπορεί να μην είναι εφικτή η πραγματοποίησή τους (κάποιος συνδυασμός επιπέδων των παραγόντων να είναι «απαγορευτικός»)

17

## Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί

### Πλεονεκτήματα

Πιο οικονομικοί και «ευέλικτοι» σχεδιασμοί. Το πλήθος των θεραπειών που χρησιμοποιούνται αποφασίζεται από τον πειραματιστή.

### Μειονεκτήματα

- Δεν μπορούμε να έχουμε ανεξάρτητη εκτίμηση για όλες τις παραγοντικές επιδράσεις (προφανώς ούτε και ελέγχους).
- Υπάρχουν πολλές διαφορετικές επιλογές του υποσυνόλου των θεραπειών που θα χρησιμοποιηθεί.
- Δεν καταλήγουν όλες σε χρήσιμους σχεδιασμούς.

***Πως άραγε εντοπίζουμε (ή καλύτερα κατασκευάζουμε) καλούς κλασματικούς σχεδιασμούς;***

18

### Πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα

Ενας γεωργός ενδιαφέρεται να μελετήσει τις επιδράσεις που έχει το είδος του σπόρου, ο προμηθευτής του υγρού λιπάσματος και η ποσότητα του υγρού λιπάσματος που χρησιμοποιεί στο μέγεθος της τελικής συγκομιδής ενός προϊόντος. Στην αγορά υπάρχουν τρία είδη σπόρου (το Α, το Β και το Γ), τρεις προμηθευτές λιπάσματος (ο Π1, ο Π2 και ο Π3) ενώ το λίπασμα ενδείκνυται να χρησιμοποιείται σε τρεις ποσότητες (1lt, 1.5 lt και 2lt) ανά 50 τετραγωνικά μέτρα καλλιέργειας. Για τον πειραματισμό, αποφασίζει να χρησιμοποιήσει τον πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό, εξετάζοντας όλες τις δυνατές θεραπείες (προφανώς σε ομογενείς συνθήκες καλλιέργειας).

19

### Πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα

#### Ο σχεδιασμός

	Σπόρος	Προμηθευτής	Ποσότητα		Σπόρος	Προμηθευτής	Ποσότητα		Σπόρος	Προμηθευτής	Ποσότητα
1	A	Π1	1	10	B	Π1	1	19	Γ	Π1	1
2	A	Π1	1.5	11	B	Π1	1.5	20	Γ	Π1	1.5
3	A	Π1	2	12	B	Π1	2	21	Γ	Π1	2
4	A	Π2	1	13	B	Π2	1	22	Γ	Π2	1
5	A	Π2	1.5	14	B	Π2	1.5	23	Γ	Π2	1.5
6	A	Π2	2	15	B	Π2	2	24	Γ	Π2	2
7	A	Π3	1	16	B	Π3	1	25	Γ	Π3	1
8	A	Π3	1.5	17	B	Π3	1.5	26	Γ	Π3	1.5
9	A	Π3	2	18	B	Π3	2	27	Γ	Π3	2

Ο σχεδιασμός είναι ένας πίνακας (design matrix), με 27 γραμμές και 3 στήλες. Κάθε γραμμή είναι και μία θεραπεία. Κάθε στήλη αντιστοιχεί και σε έναν παράγοντα. Ο πλήρης σχεδιασμός για 3 παράγοντες με 3 επίπεδα ο καθένας είναι – όπως ήδη αναφέραμε – μοναδικός. Χωρίς βλάβη, μπορούμε να τον αναπαραστήσουμε σε μια γενική μορφή, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 1, 2 και 3 αντί για τα πραγματικά επίπεδα των παραγόντων.

20

	A	B	C
1	1	1	1
2	1	1	2
3	1	1	3
4	1	2	1
5	1	2	2
6	1	2	3
7	1	3	1
8	1	3	2
9	1	3	3
10	2	1	1
11	2	1	2
12	2	1	3
13	2	2	1
14	2	2	2
15	2	2	3
16	2	3	1
17	2	3	2
18	2	3	3
19	3	1	1
20	3	1	2
21	3	1	3
22	3	2	1
23	3	2	2
24	3	2	3
25	3	3	1
26	3	3	2
27	3	3	3

### Πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα

#### Ο σχεδιασμός σε πιο γενική μορφή

Ο πίνακας σχεδιασμού (design matrix) του πλήρους παραγοντικού για τη μελέτη τριών παραγόντων με τρία επίπεδα ο καθένας.

Μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε πρόβλημα μελέτης τριών παραγόντων με τρία επίπεδα ο καθένας. Ανάλογα με το πρόβλημα, αλλάζουν τα ονόματα των παραγόντων και αντιστοιχούνται τα πραγματικά επίπεδα των παραγόντων στις τιμές 1, 2 και 3.

Δεν παίζει κανένα ρόλο (μάλιστα βοηθάει και στην τυχαιοποίηση) σε ποια στήλη θα αναθέσουμε τον εκάστοτε παράγοντα, ή σε ποια τιμή θα αντιστοιχήσουμε τα πραγματικά επίπεδα.

21

	A	B	C
1	1	1	1
2	1	1	2
3	1	1	3
4	1	2	1
5	1	2	2
6	1	2	3
7	1	3	1
8	1	3	2
9	1	3	3
10	2	1	1
11	2	1	2
12	2	1	3
13	2	2	1
14	2	2	2
15	2	2	3
16	2	3	1
17	2	3	2
18	2	3	3
19	3	1	1
20	3	1	2
21	3	1	3
22	3	2	1
23	3	2	2
24	3	2	3
25	3	3	1
26	3	3	2
27	3	3	3

Παρατηρώντας τον πίνακα σχεδιασμού του πλήρους παραγοντικού για τη μελέτη τριών παραγόντων με τρία επίπεδα ο καθένας, προκύπτουν τα εξής ευρήματα:

- Σε κάθε στήλη εμφανίζονται όλα τα επίπεδα του παράγοντα που αντιστοιχείται στη στήλη αυτή και μάλιστα τον ίδιο αριθμό φορές. **Η ιδιότητα αυτή καλείται ισορροπία.**
- Σε κάθε επιλογή δύο στηλών, εμφανίζονται όλοι οι συνδυασμοί των επιπέδων των παραγόντων που αντιστοιχούνται στις στήλες αυτές και μάλιστα τον ίδιο αριθμό φορές.
- Σε κάθε επιλογή τριών στηλών, εμφανίζονται όλοι οι συνδυασμοί των επιπέδων των παραγόντων που αντιστοιχούνται στις στήλες αυτές και μάλιστα τον ίδιο αριθμό φορές.

**Η ιδιότητα αυτή καλείται ορθογωνιότητα η οποία αναφέρεται με σχετικό βαθμό, ανάλογα με το πλήθος των στηλών που συμβαίνει αυτό.**

22

### Πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί – Ιδιότητες

Οι ιδιότητες της ισορροπίας και της ορθογωνιότητας (και μάλιστα στο μέγιστο βαθμό) ικανοποιούνται σε όλους τους πλήρεις παραγοντικούς σχεδιασμούς.

Συγκεκριμένα, στον πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό για τη μελέτη  $k$  παραγόντων με  $s_i, i = 1, 2, \dots, k$  επίπεδα ο καθένας

- σε κάθε στήλη εμφανίζονται όλα τα επίπεδα του αντίστοιχου παράγοντα με την ίδια συχνότητα το καθένα,
- σε κάθε επιλογή  $m$  στηλών,  $2 \leq m \leq k$  εμφανίζονται όλοι οι συνδυασμοί των επιπέδων των  $m$  αντίστοιχων παραγόντων, με την ίδια συχνότητα ο καθένας.

Το γεγονός αυτό είναι που μας επιτρέπει να έχουμε **ανεξάρτητη εκτίμηση όλων** των παραγοντικών επιδράσεων.

23

### Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα

Ο γεωργός που όπως είδαμε ενδιαφέρεται να μελετήσει τις επιδράσεις που έχει το είδος του σπόρου, ο προμηθευτής του υγρού λιπάσματος και η ποσότητα του υγρού λιπάσματος που χρησιμοποιεί στο μέγεθος της τελικής συγκομιδής ενός προϊόντος, θεωρεί ότι δεν μπορεί να εξασφαλίσει ομογενείς συνθήκες καλλιέργειας – ούτε και διάθετει τον απαραίτητο χρόνο – και για τα 27 πειράματα που πρέπει να πραγματοποιήσει με τη χρήση του πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού. Αντιθέτως, θεωρεί ότι μπορεί να πραγματοποιήσει μόνο 9 πειράματα. Προτίθεται λοιπόν να χρησιμοποιήσει έναν κλασματικό παραγοντικό σχεδιασμό, αλλά προβληματίζεται για το ποιες 9 θεραπείες πρέπει να χρησιμοποιήσει.

24

### **Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα**

Με μια πρώτη ματιά, υπάρχουν 4686825 διαφορετικές επιλογές 9 θεραπειών από τις 27 συνολικά που δημιουργούνται από τους συνδυασμούς των επιπέδων των τριών υπό εξέταση παραγόντων.

**Σαφώς λοιπόν, η επιλογή δεν είναι εύκολη.**

Λογικά σκεπτόμενοι, μια επιλογή που θα εξασφάλιζε το βασικό πλεονέκτημα του πλήρους σχεδιασμού – την ανεξάρτητη εκτίμηση των παραγοντικών επιδράσεων δηλαδή – θα ήταν ιδανική.

Όμως, όπως ήδη αναφέραμε, κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό στους κλασματικούς σχεδιασμούς.

**Οκ, μήπως τότε να δούμε αν μπορεί αυτό να επιτευχθεί για κάποιες επιδράσεις;**

25

### **Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παραδοχές**

Η σύγκριση των παραγοντικών επιδράσεων είναι αναπόφευκτη στους κλασματικούς σχεδιασμούς.

Η χρήση τους λοιπόν «απαιτεί» από τον πειραματιστή να περιοριστεί στο πλήθος και το είδος των επιδράσεων των παραγόντων (κύριες και αλληλεπιδράσεις) που θέλει να μελετήσει. Γενικά, για τη χρήση τους επικαλούμαστε τις ακόλουθες 3 βασικές αρχές που διέπουν τις παραγοντικές επιδράσεις (και πραγματοποιούνται πολύ συχνά στην πράξη):

- 1. Σποραδικότητα των επιδράσεων**
- 2. Ιεραρχία των επιδράσεων**
- 3. Κληρονομικότητα των επιδράσεων**

26

## Αρχές παραγοντικών επιδράσεων

### Σποραδικότητα των επιδράσεων

Δεν αναμένεται να είναι σημαντικές όλες οι παραγοντικές επιδράσεις αλλά αντιθέτως, μόνο ένα μικρό υποσύνολο αυτών.

### Ιεραρχία των επιδράσεων

Οι παραγοντικές επιδράσεις ταξινομούνται ανάλογα με το πλήθος των παραγόντων που συμμετέχουν σε αυτές ως: Κύριες επιδράσεις, αλληλεπιδράσεις 2 παραγόντων (ή 1<sup>ης</sup> τάξης), αλληλεπιδράσεις 3 παραγόντων (ή 2<sup>ης</sup> τάξης) κλπ. Σημαντικές αναμένεται να είναι επιδράσεις χαμηλής τάξης.

### Κληρονομικότητα των επιδράσεων

Αν μια αλληλεπίδραση είναι σημαντική, αναμένεται να είναι σημαντικές και οι κύριες επιδράσεις των παραγόντων που τη συνθέτουν (ή τουλάχιστον κάποιες).

27

## Κριτήρια για την επιλογή κλασματικών σχεδιασμών

Με βάση λοιπόν τις αρχές που διέπουν τις παραγοντικές επιδράσεις, και δεδομένης της αναπόφευκτης σύγκρισης αυτών στους κλασματικούς σχεδιασμούς, επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν κλασματικό σχεδιασμό που θα επιτρέπει την ανεξάρτητη εκτίμηση επιδράσεων χαμηλής τάξης. Δηλαδή, επιθυμητό είναι οι κύριες επιδράσεις να εκτιμώνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη και στη συνέχεια, **αν γίνεται**, οι εκτιμήσεις των κύριων επιδράσεων να είναι ανεξάρτητες από τις αλληλεπιδράσεις 1<sup>ης</sup> τάξης, και στη συνέχεια, **αν είναι εφικτό**, οι εκτιμήσεις των αλληλεπιδράσεων 1<sup>ης</sup> τάξης να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, κ.ο.κ. [σε κάθε περίπτωση, όλες οι επιδράσεις με τάξη μεγαλύτερη από αυτήν που αναφερόμαστε κάθε φορά, θα θεωρούνται αμελητέες]

**Προφανώς, ο τρόπος επιλογής (η κατασκευή δηλαδή του σχεδιασμού) ακόμα δεν είναι άμεσος**

28

### Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα Επιλογή 1

Ο γεωργός του προβλήματός μας, επιλέγει τις ακόλουθες 9 θεραπείες για τον κλασματικό σχεδιασμό που θα χρησιμοποιήσει.

Σπόρος	Προμηθευτής	Ποσότητα
A	Π1	1
A	Π1	1.5
A	Π1	2
B	Π1	1
B	Π1	1.5
B	Π1	2
Γ	Π1	1
Γ	Π1	1.5
Γ	Π1	2

29

### Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα Επιλογή 2

Ο γεωργός του προβλήματός μας επιλέγει τις ακόλουθες 9 θεραπείες για τον κλασματικό σχεδιασμό που θα χρησιμοποιήσει.

Σπόρος	Προμηθευτής	Ποσότητα
A	Π1	1
A	Π1	1.5
A	Π1	2
B	Π2	1
B	Π2	1.5
B	Π2	2
Γ	Π3	1
Γ	Π3	1.5
Γ	Π3	2

30

### Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα Επιλογή 3

Ο γεωργός του προβλήματός μας επιλέγει τις ακόλουθες 9 θεραπείες για τον κλασματικό σχεδιασμό που θα χρησιμοποιήσει.

Σπόρος	Προμηθευτής	Ποσότητα
A	Π1	1
A	Π2	1.5
A	Π3	2
B	Π1	1.5
B	Π2	2
B	Π3	1
Γ	Π1	2
Γ	Π2	1
Γ	Π3	1.5

31

### Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα

Ας δούμε τις 3 επιλογές με το «μάτι» που δουλέψαμε τον πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό (γενική μορφή, **ισορροπία** και **ορθογωνιότητα**).

Επιλογή 1			Επιλογή 2			Επιλογή 3		
A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	2	1	2	2
1	1	3	1	1	3	1	3	3
2	1	1	2	2	1	2	1	2
2	1	2	2	2	2	2	2	3
2	1	3	2	2	3	2	3	1
3	1	1	3	3	1	3	1	3
3	1	2	3	3	2	3	2	1
3	1	3	3	3	3	3	3	2

32



## Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα

### Η επιλογή 1

#### Επιλογή 1

A	B	C
1	1	1
1	1	2
1	1	3
2	1	1
2	1	2
2	1	3
3	1	1
3	1	2
3	1	3

Παρατηρώντας τον πίνακα σχεδιασμού του κλασματικού παραγοντικού για την επιλογή 1, προκύπτουν τα εξής ευρήματα:

- Στη δεύτερη στήλη ΔΕΝ εμφανίζονται όλα τα επίπεδα του παράγοντα που αντιστοιχείται στη στήλη αυτή (προφανώς ούτε και τον ίδιο αριθμό φορών). **Δεν έχουμε δηλαδή την ιδιότητα της ισορροπίας.**
- Στην επιλογή των στηλών A και B, ΔΕΝ εμφανίζονται όλοι οι συνδυασμοί των επιπέδων των παραγόντων που αντιστοιχούνται στις στήλες αυτές. Το ίδιο ισχύει και στην επιλογή στηλών B και C. **Δεν έχουμε δηλαδή την ιδιότητα της ορθογωνιότητας 2<sup>ου</sup> βαθμού (προφανώς ούτε τρίτου).**

33

## Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα

### Η επιλογή 2

#### Επιλογή 2

A	B	C
1	1	1
1	1	2
1	1	3
2	2	1
2	2	2
2	2	3
3	3	1
3	3	2
3	3	3

Παρατηρώντας τον πίνακα σχεδιασμού του κλασματικού παραγοντικού για την επιλογή 2, προκύπτουν τα εξής ευρήματα:

- Σε κάθε στήλη εμφανίζονται όλα τα επίπεδα του παράγοντα που αντιστοιχείται στη στήλη αυτή και μάλιστα τον ίδιο αριθμό φορών. **Έχουμε δηλαδή την ιδιότητα της ισορροπίας.**
- Στην επιλογή των στηλών A και B, ΔΕΝ εμφανίζονται όλοι οι συνδυασμοί των επιπέδων των παραγόντων που αντιστοιχούνται στις στήλες αυτές. **Δεν έχουμε δηλαδή την ιδιότητα της ορθογωνιότητας 2<sup>ου</sup> βαθμού (προφανώς ούτε τρίτου).**

34

## Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί – Παράδειγμα

### Η επιλογή 3

#### Επιλογή 3

A	B	C
1	1	1
1	2	2
1	3	3
2	1	2
2	2	3
2	3	1
3	1	3
3	2	1
3	3	2

Παρατηρώντας τον πίνακα σχεδιασμού του κλασματικού παραγοντικού για την επιλογή 3, προκύπτουν τα εξής ευρήματα:

- Σε κάθε στήλη εμφανίζονται όλα τα επίπεδα του παράγοντα που αντιστοιχείται στη στήλη αυτή και μάλιστα τον ίδιο αριθμό φορές. Έχουμε δηλαδή την ιδιότητα της ισορροπίας.
- Σε κάθε επιλογή δύο στηλών, εμφανίζονται όλοι οι συνδυασμοί των επιπέδων των παραγόντων που αντιστοιχούνται στις στήλες αυτές και μάλιστα τον ίδιο αριθμό φορές. Έχουμε δηλαδή την ιδιότητα της ορθογωνιότητας 2<sup>ου</sup> βαθμού (προφανώς τρίτου βαθμού δεν γίνεται να επιτευχθεί).

35

## Παρατηρήσεις – Γεγονότα

Ο βαθμός της ορθογωνιότητας ενός σχεδιασμού έχει άμεση σχέση με τη σύγχυση των παραγοντικών επιδράσεων που προκύπτει με τη χρήση του συγκεκριμένου σχεδιασμού. Έτσι, σε απλά ισορροπημένο σχεδιασμό, οι κύριες επιδράσεις δεν εκτιμώνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη.

Σε σχεδιασμό με βαθμό ορθογωνιότητας 2, οι κύριες επιδράσεις εκτιμώνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη, αλλά συγχέονται με αλληλεπιδράσεις 1<sup>ης</sup> τάξης.

Σε σχεδιασμό με βαθμό ορθογωνιότητας 3, οι κύριες επιδράσεις εκτιμώνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη, αλλά και ανεξάρτητα από αλληλεπιδράσεις 1<sup>ης</sup> τάξης. Όμως οι αλληλεπιδράσεις 1<sup>ης</sup> τάξης συγχέονται μεταξύ τους κ.ο.κ.

[σε κάθε περίπτωση, όλες οι επιδράσεις με τάξη μεγαλύτερη από αυτήν που αναφερόμαστε κάθε φορά ελέγχοντας τη σύγχυση, θα θεωρούνται αμελητέες]

36

## Ορθογώνιοι σχηματισμοί

Λογικά λοιπόν, ένα καλό κριτήριο επιλογής κλασματικού παραγοντικού σχεδιασμού είναι η επίτευξη ορθογωνιότητας όσο μεγαλύτερου βαθμού γίνεται.

Δυστυχώς, η απαίτηση αυτή οδηγεί και πάλι στη χρήση σχεδιασμών με μεγάλο πλήθος θεραπειών και συνεπώς σε μη οικονομικούς σχεδιασμούς.

Οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη  $k$  παραγόντων με  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  επίπεδα ο καθένας και επιτυγχάνουν βαθμό ορθογωνιότητας  $t$ , ανήκουν στην κατηγορία των **Ορθογώνιων σχηματισμών (Orthogonal Arrays)**.

Συμβολίζονται με  $OA(n, k, s_1, s_2, \dots, s_k, t)$ .

37

## Ορθογώνιοι σχηματισμοί

Στο συμβολισμό  $OA(n, k, s_1, s_2, \dots, s_k, t)$

$n$  είναι το πλήθος των γραμμών του σχεδιασμού, δηλαδή το πλήθος των πειραμάτων που θα εκτελέσουμε (λέγονται και εκτελέσεις - runs),

$k$  είναι το πλήθος των στηλών του σχεδιασμού, δηλαδή το πλήθος των παραγόντων που μελετάμε και

$t$  είναι ο βαθμός ορθογωνιότητας των στηλών του σχεδιασμού (καλείται και ισχύς - strength).

Υπάρχουν άραγε τρόποι να κατασκευάζουμε **Ορθογώνιους σχηματισμούς (Orthogonal Arrays)** για οποιοδήποτε πλήθος εκτελέσεων και παραγόντων και με δεδομένο βαθμό ορθογωνιότητας;

38

## Βιβλιογραφία

A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane and J. Stufken, *Orthogonal Arrays: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

D. C. Montgomery, *Design and analysis of experiments*, 5th ed., Wiley, New York, 2004.

C. F. J. Wu and M. Hamada, *Experiments: Planning, Analysis, and Parameter Design Optimization*, 2<sup>nd</sup> ed., Wiley, New York, 2009.