Σχεδιασμοί και Ανάλυση Πειραμάτων με Εφαρμογές σε περιβάλλον *R*

Αναστάσιος Κατσιλέρος

Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Εργαστήριο Βελτίωσης Φυτών και Γεωργικού Πειραματισμού

katsileros@aua.gr

Αθήνα 2022

Παραγοντικά Πειράματα

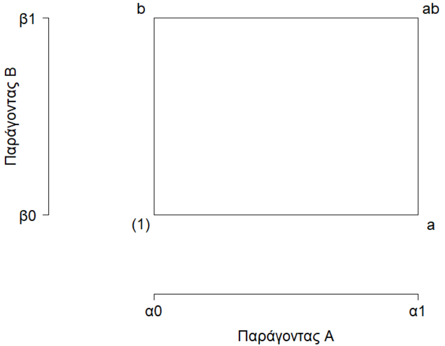
Για την ταυτόχρονη μελέτη της επίδρασης δύο ή περισσοτέρων παραγόντων στην απόκριση μίας μεταβλητής, χρησιμοποιούνται τα **παραγοντικά πειράματα** (factorial experiments). Με τα πειράματα αυτά ελέγχεται η παραλλακτικότητα που οφείλεται στην **επίδραση** (effect) των επιπέδων του κάθε παράγοντα ξεχωριστά, αλλά και η παραλλακτικότητα που μπορεί να οφείλεται στην κοινή - συνεργική επίδραση ή **αλληλεπίδραση** (interaction) των επιπέδων των παραγόντων.

- **Πλήρη παραγοντικά πειράματα** (full factorial experiment), στα οποία οι πειραματικές μονάδες λαμβάνουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων σύμφωνα με κάποιο πειραματικό σχέδιο ή διάταξη.
- Παραγοντικά πειράματα μη πλήρων ομάδων, τα οποία δημιουργούνται με την τεχνική της **ανάμειξης** (confounding factorials) και χρησιμοποιούνται όταν το πειραματικό υλικό ή τα μέσα είναι περιορισμένα.

- **Κλασματικά παραγοντικά** (fractional factorials), στα οποία εκτελείται ένα συγκεκριμένο υποσύνολο - κλάσμα των συνδυασμών των επιπέδων και χρησιμοποιούνται συνήθως σε προκαταρκτικά πειράματα κρησαρίσματος (π.χ. Plackett-Burman Design).
- Παραγοντικά πειράματα της **μεθοδολογίας αποκριτικής επιφάνειας** (response surface methodology), τα οποία χρησιμοποιούνται για την βελτιστοποίηση της απόκρισης μίας μεταβλητής (π.χ. Central Composite Design, Box–Behnken Design).

Παραγοντικός σχεδιασμός 2^k

Ο σχεδιασμός 2^k είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στα αρχικά στάδια της πειραματικής διαδικασίας, όταν μεγάλος αριθμός παραγόντων πρέπει να διερευνηθεί. Παρέχει τον ελάχιστο αριθμό εκτελέσεων στην οποία k παράγοντες μπορούν να μελετηθούν με έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό. Τα σχέδια είναι ευρέως χρησιμοποιούμενα σε **πειράματα διαχωριστικά - κρησαρίσματος** (factor screening experiments).



Σχήμα 1: Πείραμα δύο παραγόντων με δύο επίπεδα (2^2)

Οι **επιδράσεις** (effect) ενός παράγοντα ορίζονται ως οι μεταβολές στις μετρήσεις μίας μεταβλητής απόκρισης Y, που οφείλεται στην αλλαγή των επίπεδων του παράγοντα.

Η **απλή επιδράση** (simple effect) ενός παράγοντα είναι η μεταβολή της μεταβλητής, στην αλλαγή των επίπεδων του παράγοντα, σε κάθε επίπεδο του άλλου παράγοντα.

Για τον παράγοντα Α, οι απλές επιδράσεις σε κάθε επίπεδο του παράγοντα Β (β_0 και β_1) υπολογίζονται ως εξής:

$$A_{(\beta 0)} = \frac{a - (1)}{n} \quad \text{και} \quad A_{(\beta 1)} = \frac{ab - b}{n}$$

και για τον παράγοντα Β, οι απλές επιδράσεις σε κάθε επίπεδο του παράγοντα Α (α_0 και α_1):

$$B_{(\alpha 0)} = \frac{b - (1)}{n} \quad \text{και} \quad B_{(\alpha 1)} = \frac{ab - a}{n}$$

όπου: n, ο αριθμός των επαναλήψεων.

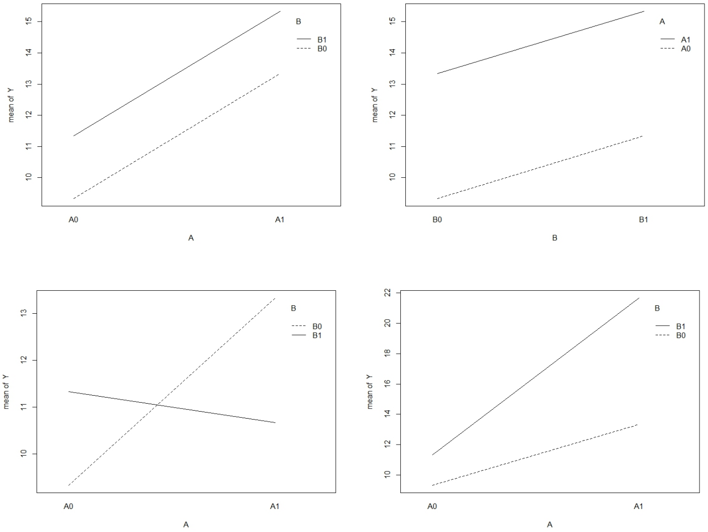
Η **κύρια** ή **μέση επίδραση** (main effect) ενός παράγοντα, είναι η μέση μεταβολή της μεταβλητής στην αλλαγή των επίπεδων του παράγοντας, σε όλα τα επίπεδα του άλλου παράγοντα και υπολογίζεται ως εξής:

$$A = \frac{1}{2^{(k-1)}} \frac{(ab-b)+(a-(1))}{n} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{2^{(k-1)}} \frac{(ab-a)+(b-(1))}{n}$$

όπου: k, ο αριθμός των παραγόντων.

Η **αλληλεπίδραση** (interaction effect), με την οποία ελέγχεται αν οι απλές επιδράσεις των επιπέδων του ενός παράγοντα είναι παρόμοιες σε όλα τα επίπεδα του άλλου παράγοντα, υπολογίζεται ως εξής:

$$AB = \frac{1}{2^{(k-1)}} \frac{(ab-b)-(a-(1))}{n} \quad \text{ή} \quad AB = \frac{1}{2^{(k-1)}} \frac{(ab-a)+(b-(1))}{n}$$


mean of Y
A0
A1
A
B
B1
B0
mean of Y
B0
B1
B
A
A1
A0
mean of Y
A0
A1
A
B
B0
B1
mean of Y
A0
A1
A
B
B1
B0

Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης

Πηγή Παρ/τας	Βαθμοί Ελευθερίας	Άθροισμα Τετραγώνων	Μέσο Τετράγωνο	Δοκιμασία F	ΘΣΜΤ[1]
Παράγοντας A	$a-1$	$bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...})^2$	$\frac{SS_A}{SS_{df_A}}$	$\frac{MS_A}{MS_{error}}$	$\sigma^2+\frac{bn\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}$
Παράγοντας B	$b-1$	$an\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{...})^2$	$\frac{SS_B}{SS_{df_B}}$	$\frac{MS_B}{MS_{error}}$	$\sigma^2+\frac{an\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1}$
Αλληλεπίδραση AB	$(a-1)(b-1)$	$n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{ij.}-\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{.j.}+\bar{Y}_{...})^2$	$\frac{SS_{AB}}{SS_{df_{AB}}}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_{error}}$	$\sigma^2+\frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\alpha\beta_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
Σφάλμα	$ab(n-1)$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk}-\bar{Y}_{ij.})^2$	$\frac{SS_{error}}{SS_{error}}$		σ^2
Σύνολο	$abn-1$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk}-\bar{Y}_{...})^2$			

[1] Σταθερών επιδράσεων

Παράδειγμα 1.

Σε ένα πείραμα αξιολογήθηκε η επίδραση της συγκέντρωσης ενός αντιδραστηρίου (A) (15% και 25%) και της ποσότητας του καταλύτη (B) (χαμηλή και υψηλή), στην απόδοση μιας χημικής διεργασίας, με τρεις επαναλήψεις.

A	B	Συνδυασμοί	1	2	3	Σύνολο
$-$	$-$	$\alpha_0\beta_0$ ή (1)	28	25	27	80
$+$	$-$	$\alpha_1\beta_0$ ή a	36	32	32	100
$-$	$+$	$\alpha_0\beta_1$ ή b	18	19	23	60
$+$	$+$	$\alpha_1\beta_1$ ή bc	31	30	29	90

Πίνακας αλγεβρικών πρόσημων για 2^2 σχέδιο

Συνδυασμοί επεμβάσεων		Επιδράσεις				Σύνολο
		I	A	B	AB	
- -	(1)	+	-	-	+	80
+ -	a	+	+	-	-	100
- +	b	+	-	+	-	60
+ +	ab	+	+	+	+	90

$$Effect = \frac{\text{(contrast of totals)}}{2^{(k-1)}n}$$

$$SS_{Effect} = \frac{\text{(contrast of totals)}^2}{2^k n}$$

Αλγόριθμός του Yates για το 2^2 σχεδιασμό

Επεμβάσεις	Y	(1)	(2)	Επίδραση	Εκτίμηση Επιδράσεων $(2)/n2^{k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $(2)^2/n2^k$
(1)	80	180	330	I	-	-
a	100	150	50	A	8,33	208,3
b	60	20	-30	B	-5	75
ab	90	30	10	AB	1,66	8,33

Πίνακας ανάλυσης διακύμανσης

Πηγή Παρ/τας	Βαθμοί Ελευθερίας	Άθροισμα Τετραγώνων	Μέσο Τετράγωνο	Δοκιμασία F	F πίνακα
A	$a - 1 = 1$	208,3	208,3	53,191***	5,317
B	$b - 1 = 1$	75	75	19,148**	5,317
AB	$(a - 1)(b - 1) = 1$	8,3	8,3	2,127	5,317
Υπόλοιπο	$ab(n - 1) = 8$	31,3	3,917		
Σύνολο	$abn - 1 = 11$	323			

```
> design=expand.grid(A=c(-1,1),B=c(-1,1),Rep=c(1,2,3))
> design
    A   B  Rep
1  -1  -1    1
2   1  -1    1
3  -1   1    1
4   1   1    1
5  -1  -1    2
6   1  -1    2
7  -1   1    2
8   1   1    2
9  -1  -1    3
10  1  -1    3
11 -1   1    3
12  1   1    3
```

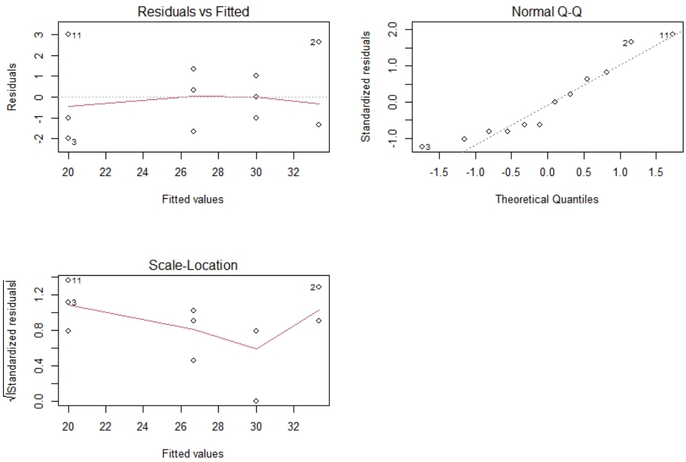
```
> library(FrF2)
> design=FrF2(4, 2, replications = 3, randomize = FALSE)
```

ή

```
> library(DoE.base)
> design=fac.design(2, 2, replications= 3, randomize=FALSE)
```

```
> Y=c(28, 36, 18, 31, 25, 32, 19, 30, 27, 32, 23, 29)
> data=cbind(design, Y)
> data
     A   B   Rep  Y
1   -1  -1   1   28
2    1  -1   1   36
3   -1   1   1   18
4    1   1   1   31
5   -1  -1   2   25
6    1  -1   2   32
7   -1   1   2   19
8    1   1   2   30
9   -1  -1   3   27
10   1  -1   3   32
11  -1   1   3   23
12   1   1   3   29
```

```
> fit=aov(Y~(A+B)^2,data)
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(fit)
```



```
> fit=aov(Y~(A+B)^2,data)
> anova(fit)
Analysis of Variance Table
Response: Y
          Df  Sum Sq   Mean Sq  F value  Pr(>F)
A          1  208.333  208.333  53.1915  8.444e-05 ***
B          1   75.000   75.000  19.1489  0.002362 **
A:B        1    8.333    8.333   2.1277  0.182776
Residuals  8   31.333    3.917
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Ανάλυση παλινδρόμησης

Σε ένα 2^2 παραγοντικό σχεδιασμό, μπορούμε αναλύσουμε τα δεδομένα του πειράματος με ένα μοντέλο παλινδρόμησης (πρώτης τάξης):

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

όπου: x_1 και x_2 είναι οι κωδικοποιημένες μεταβλητές των παραγόντων A και B και β_1, β_2 και β_{12} οι συντελεστές παλινδρόμησης.

Η σχέση των κωδικοποιημένων μεταβλητών με τα πραγματικά δεδομένα είναι:

$$x_1 = \frac{a - (a0 + a1)/2}{(a1 - a0)/2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{b - (b0 + b1)/2}{(b1 - b0)/2}$$

Όταν οι φυσικές τιμές έχουν δύο μόνο επίπεδα, η κωδικοποίηση θα παράγει τον ± 1 συμβολισμό για τα επίπεδα των κωδικοποιημένων μεταβλητών

$$x_1 = \frac{a - (a0 + a1)/2}{(a1 - a0)/2} = \frac{a - (15 + 25)/2}{(25 - 15)/2} = \frac{a - 20}{5}$$

$$x_2 = \frac{b - (b0 + b1)/2}{(b1 - b0)/2} = \frac{b - (1 + 2)/2}{(2 - 1)/2} = \frac{b - 1,5}{0,5}$$

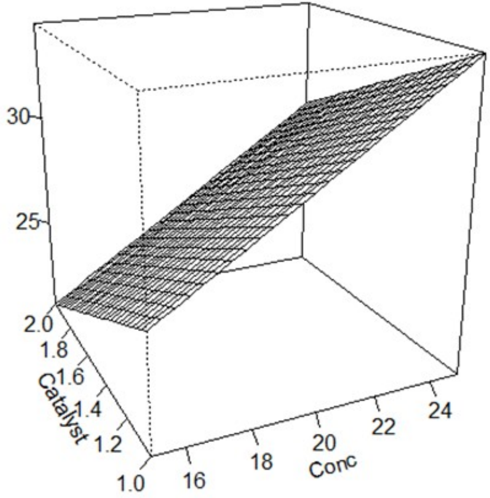
Επομένως το μοντέλο παλινδρόμησης που προσαρμόζεται είναι:

$$y = 27,5 + \left(\frac{8,33}{2}\right) x_1 + \left(\frac{-5}{2}\right) x_2$$

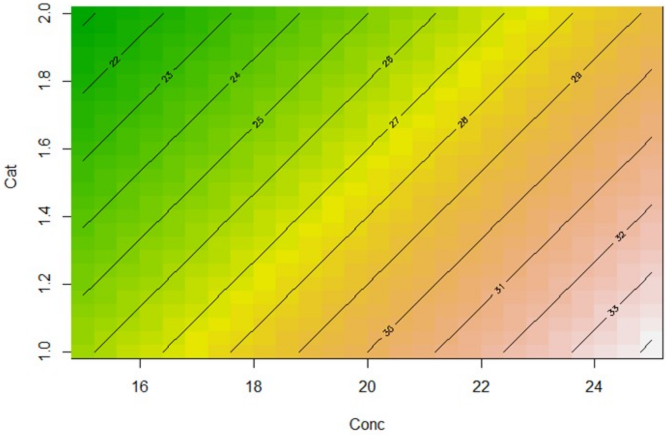
```
> fit=lm(Y~(A+B)^2,data)
> summary(fit)
Call:
lm.default(formula = Y~(A + B)^2, data = data)
Residuals:
   Min      1Q     Median     3Q      Max
 -2.000   -1.333   -0.500   1.083   3.000
Coefficients:
              Estimate   Std. Error   t value   Pr(>|t|)
 (Intercept)  27.5000     0.5713      48.135    3.84e-11 ***
 A1            4.1667     0.5713       7.293    8.44e-05 ***
 B1           -2.5000     0.5713      -4.376    0.00236 **
 A1:B1         0.8333     0.5713       1.459    0.18278
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 1.979 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.903, Adjusted R-squared: 0.8666
F-statistic: 24.82 on 3 and 8 DF, p-value: 0.0002093
```

```
> library (rsm)
> data=as.coded.data(data,A~(Conc-20)/5,B~(Cat-1.5)/0.5)
> data
     Conc  Cat  Rep  Y
1     -1   -1    1   28
2      1   -1    1   36
3     -1    1    1   18
4      1    1    1   31
5     -1   -1    2   25
6      1   -1    2   32
7     -1    1    2   19
8      1    1    2   30
9     -1   -1    3   27
10     1   -1    3   32
11    -1    1    3   23
12     1    1    3   29
```

```
> datarsm=rsm(Y ~ FO(A,B), data)
> persp(datarsm, B ~ A)
```



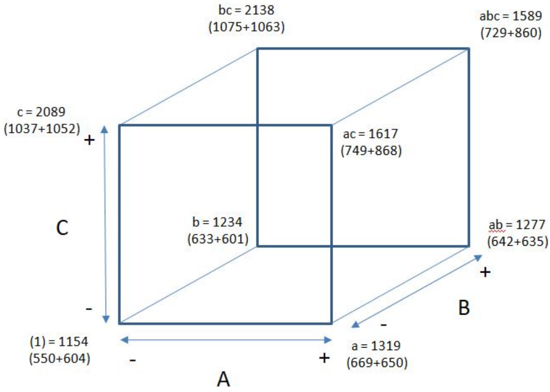
```
> contour(datarsm, ~ A + B, image=TRUE)
```



Παράδειγμα 2.

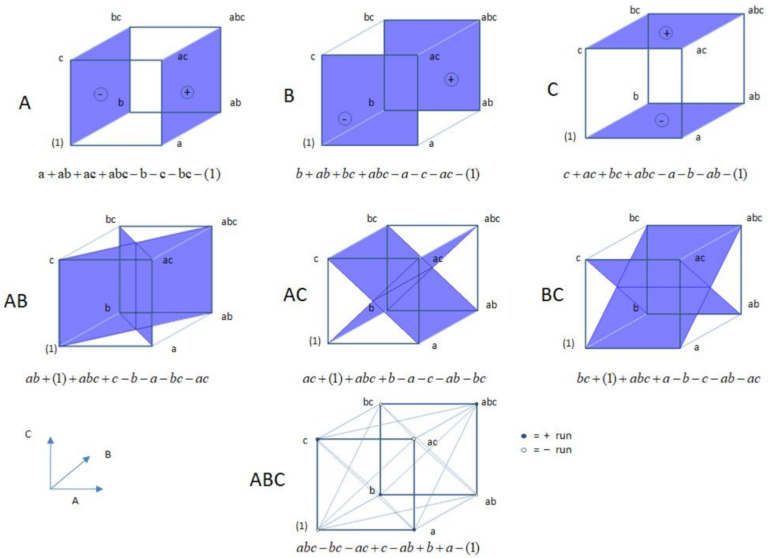
Σε ένα πείραμα μελετήθηκε η επίδραση τριών παραγόντων σε δύο επίπεδα (κενό μεταξύ των ηλεκτροδίων - A, η ροή του αερίου - B και η ισχύς ραδιοσυχνοτήτων - C), στην οξείδωση του νιτρίδιου του πυριτίου.

Run	A	B	C	1	2	Y (Etch Rate)
1	-1	-1	-1	550	604	(1) = 1154
2	1	-1	-1	669	650	a = 1319
3	-1	1	-1	633	601	b = 1234
4	1	1	-1	642	635	ab = 1277
5	-1	-1	1	1037	1052	c = 2089
6	1	-1	1	749	868	ac = 1617
7	-1	1	1	1075	1063	bc =2138
8	1	1	1	729	860	abc =1589



Σχήμα 3: Πείραμα τριών παραγόντων με δύο επίπεδα (2^3)

,


A
B
C
AB
AC
BC
ABC
(1)
a
b
ab
c
ac
bc
abc
a + ab + ac + abc − b − c − bc − (1)
b + ab + bc + abc − a − c − ac − (1)
c + ac + bc + abc − a − b − ab − (1)
ab + (1) + abc + c − b − a − bc − ac
ac + (1) + abc + b − a − c − ab − bc
bc + (1) + abc + a − b − c − ab − ac
abc − bc − ac + c − ab + b + a − (1)
● = + run
○ = − run

Πίνακας αλγεβρικών προσήμων σε 2^3 σχεδιασμό

Συνδυασμός	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	Σύνολο
- - -	+	-	-	+	-	+	+	-	(1) = 1154
+ - -	+	+	-	-	-	-	+	+	a = 1319
- + -	+	-	+	-	-	+	-	+	b = 1234
+ + -	+	+	+	+	-	-	-	-	ab = 1277
- - +	+	-	-	+	+	-	-	+	c = 2089
+ - +	+	+	-	-	+	+	-	-	ac = 1617
- + +	+	-	+	-	+	-	+	-	bc = 2138
+ + +	+	+	+	+	+	+	+	+	abc =1589

Αλγόριθμός του Yates για το 2^3 σχεδιασμό

Συνδυασμοί	Y	(1)	(2)	(3)	Επίδραση	Εκτίμηση Επίδρασης $(3)/r2^{k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $(3)^2/r2^k$
(1)	1154	2473	4984	12417	I	-	-
a	1319	2511	7433	-813	A	-101,6	41.311
b	1234	3706	208	59	B	7,4	218
ab	1277	3727	-1021	-199	AB	-24,9	2.475
c	2089	165	38	2449	C	306,1	374.850
ac	1617	43	21	-1229	AC	-153,6	94.403
bc	2138	-472	-122	-17	BC	-2,1	18
abc	1589	-549	-77	45	ABC	5,6	127

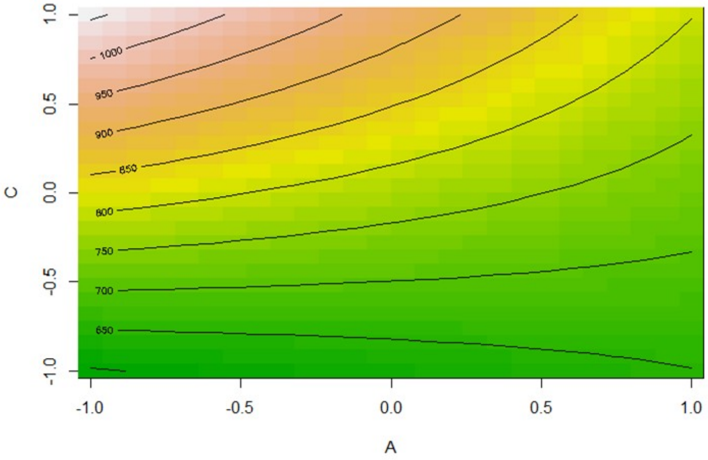
```
> data=expand.grid(A=c(-1,1),B=c(-1,1),C=c(-1,1),R=c(1,2))
> data
    A  B  C R
1  -1 -1 -1 1
2   1 -1 -1 1
3  -1  1 -1 1
4   1  1 -1 1
5  -1 -1  1 1
6   1 -1  1 1
...
12  1  1 -1 2
13 -1 -1  1 2
14  1 -1  1 2
15 -1  1  1 2
16  1  1  1 2
```

```
> Y=c(550,669,633,642,1037,749,1075,729,604,650,601,635,
1052,868,1063,860)
> data=cbind(design, Y)
> data
     A   B   C   R   Y
 1  -1  -1  -1   1   550
 2   1  -1  -1   1   669
 3  -1   1  -1   1   633
 4   1   1  -1   1   642
 5  -1  -1   1   1   1037
 6   1  -1   1   1   749
 ...
 12  1   1  -1   2   635
 13 -1  -1   1   2   1052
 14  1  -1   1   2   868
 15 -1   1   1   2   1063
 16  1   1   1   2   860
```

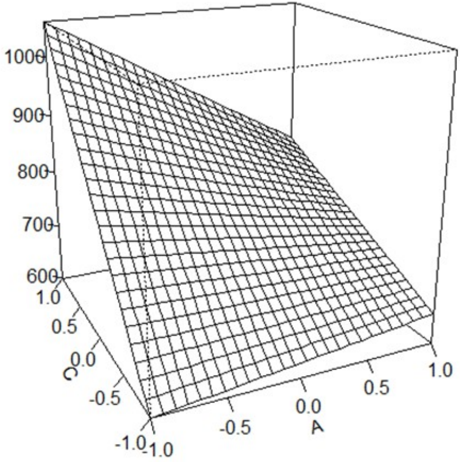
```
> anova(fit)
Analysis of Variance Table
Response: Y
          Df  Sum Sq  Mean Sq  F value      Pr(>F)
A          1   41311    41311  18.3394   0.002678**
B          1     218      218   0.0966   0.763910
C          1  374850   374850 166.4105  1.233e-06***
A:B        1    2475     2475   1.0988   0.325167
A:C        1   94403    94403  41.9090   0.000193***
B:C        1      18       18   0.0080   0.930848
A:B:C      1     127      127   0.0562   0.818586
Residuals  8   18020     2253
—
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
> fit=lm(Y A*B*C, data)
> summary(fit)
...
Coefficients:
             Estimate  Std. Error  t value   Pr(>|t|)
 (Intercept)  776.062    11.865     65.406   3.32e-12 ***
 A1           -50.813    11.865     -4.282   0.002679 **
 B1             3.687    11.865      0.311   0.763911
 C1           153.063    11.865     12.900   1.23e-06 ***
 A1:B1        -12.437    11.865     -1.048   0.325168
 A1:C1        -76.812    11.865     -6.474   0.000193 ***
 B1:C1         -1.062    11.865     -0.090   0.930849
 A1:B1:C1       2.812    11.865      0.237   0.818586
—
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 47.46 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9661, Adjusted R-squared: 0.9364
F-statistic: 32.56 on 7 and 8 DF, p-value: 2.896e-05
```

```
> datarsm=rsm(Y ~ FO(A, C) + TWI(A, C), data)
> contour(datarsm, ~ A + C, image=TRUE)
```



```
> persp(datarsm, C~ A)
```



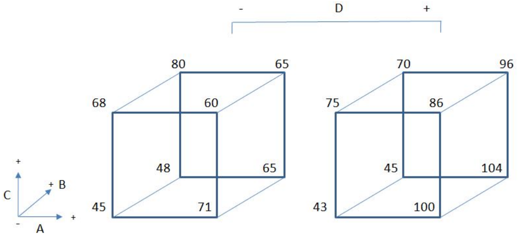
Μη επαναλαμβανόμενο παραγοντικό πείραμα

Αν και 2^k σχεδιασμός δίνει τον μικρότερο αριθμό εκτελέσεων, όταν το k είναι πολύ μεγάλο και τα μέσα είναι περιορισμένα, τότε ο ερευνητής μπορεί να περιορισθεί σε μία μόνο εκτέλεση των συνδυασμών των επιπέδων των παραγόντων.

Με μία όμως επανάληψη δεν μπορεί να εκτιμηθεί το πειραματικό σφάλμα. Μία προσέγγιση για την ανάλυση του σχεδίου είναι να υποθέσουμε ότι μερικές υψηλής τάξης αλληλεπιδράσεις είναι αμελητέες και συνδυάζοντας τα μέσα τετράγωνα αυτών να εκτιμηθεί το σφάλμα.

Παράδειγμα 3.

Μελετήθηκε η επίδραση τεσσάρων παραγόντων (θερμοκρασία - A, πίεση - B, συγκέντρωση formaldehyde - C και ρυθμός ανάδευσης - D) σε δύο επίπεδα, στο ρυθμό φιλτραρίσματος ενός προϊόντος.



Σχήμα 4: Παραγοντικός σχεδιασμός 2^4

Μη επαναλαμβανόμενο παραγοντικό πείραμα 2^4

run	A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	ABC	ABD	ACD	BCD	ABCD	Επέμβαση	Y
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	(1)	45
2	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	a	71
3	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	b	48
4	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	ab	65
5	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	c	68
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	ac	60
7	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	bc	80
8	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	abc	65
9	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	d	43
10	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	ad	100
11	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	bd	45
12	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	abd	104
13	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	cd	75
14	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	acd	86
15	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	bcd	70
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	abcd	96

Επεμβάσεις	Y	(1)	(2)	(3)	(4)	Εκτίμηση Επιδράσεων $(4)/r2^{k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $(4)^2/r2^k$
(1)	45	116	229	502	1121		
a	71	113	273	619	173	21,63	1870,56
b	48	128	292	20	25	3,125	39,06
ab	65	145	327	153	1	0,125	0,06
c	68	143	43	14	79	9,875	390,06
ac	60	149	-23	11	-145	-18,13	1314,06
bc	80	161	116	-16	19	2,375	22,56
abc	65	166	37	17	15	1,875	14,06
d	43	26	-3	44	117	14,63	855,56
ad	100	17	17	35	133	16,63	1105,56
bd	45	-8	6	-66	-3	-0,375	0,56
abd	104	-15	5	-79	33	4,125	68,06
cd	75	57	-9	20	-9	-1,125	5,06
acd	86	59	-7	-1	-13	-1,625	10,56
bcd	70	11	2	2	-21	-2,625	27,56
abcd	96	26	15	13	11	1,375	7,56

```
> library(FrF2)
> design=FrF2(16, 4,randomize = FALSE)
> design
     A  B  C  D
 1  -1 -1 -1 -1
 2   1 -1 -1 -1
 3  -1  1 -1 -1
 4   1  1 -1 -1
 5  -1 -1  1 -1
 6   1 -1  1 -1
 7  -1  1  1 -1
 ...
 11 -1  1 -1  1
 12  1  1 -1  1
 13 -1 -1  1  1
 14  1 -1  1  1
 15 -1  1  1  1
 16  1  1  1  1
```

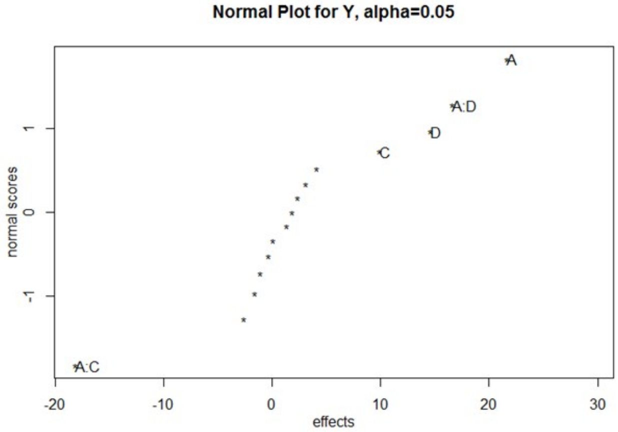
```
> Y=c(45,71,48,65,68,60,80,65,43,100,45,104,75,86,70,96)
> data=add.response(design, Y)
> data
     A   B   C   D
1   -1  -1  -1  -1   45
2    1  -1  -1  -1   71
3   -1   1  -1  -1   48
4    1   1  -1  -1   65
5   -1  -1   1  -1   68
6    1  -1   1  -1   60
7   -1   1   1  -1   80
...
11  -1   1  -1   1   45
12   1   1  -1   1  104
13  -1  -1   1   1   75
14   1  -1   1   1   86
15  -1   1   1   1   70
16   1   1   1   1   96
```

```
> anova(fit)
```

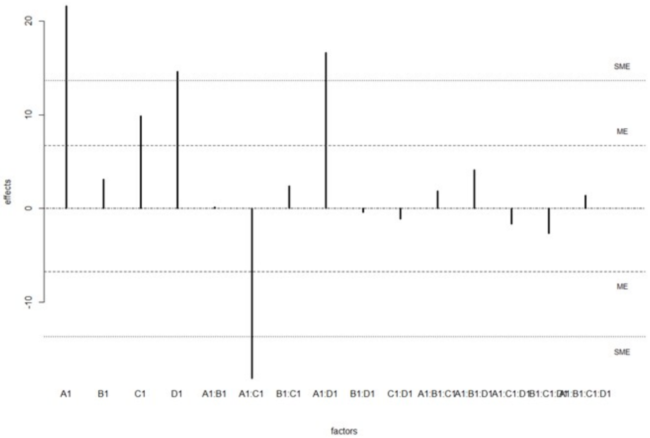
	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	1870.56	1870.56		
B	1	39.06	39.06		
C	1	390.06	390.06		
D	1	855.56	55.56		
A:B	1	0.06	0.06		
A:C	1	1314.06	1314.06		
B:C	1	22.56	22.56		
A:D	1	1105.56	1105.56		
B:D	1	0.56	0.56		
C:D	1	5.06	5.06		
A:B:C	1	14.06	14.06		
A:B:D	1	68.06	68.06		
A:C:D	1	10.56	10.56		
B:C:D	1	27.56	27.56		
A:B:C:D	1	7.56	7.56		
Residuals	0	0.00			

```
> fit=lm(Y~ A*B*C*D,data)
> summary(fit)
              Estimate   Std. Error   t value   Pr(>|t|)
 (Intercept)  70.0625            NA        NA        NA
 A1           10.8125            NA        NA        NA
 B1            1.5625            NA        NA        NA
 C1            4.9375            NA        NA        NA
 D1            7.3125            NA        NA        NA
 A1:B1         0.0625            NA        NA        NA
 A1:C1        -9.0625            NA        NA        NA
 B1:C1         1.1875            NA        NA        NA
 A1:D1         8.3125            NA        NA        NA
 B1:D1        -0.1875            NA        NA        NA
 C1:D1        -0.5625            NA        NA        NA
 A1:B1:C1      0.9375            NA        NA        NA
 ...
 B1:C1:D1     -1.3125            NA        NA        NA
 A1:B1:C1:D1   0.6875            NA        NA        NA
```

> DanielPlot(fit)



```
> library(BsMD)
> LenthPlot(fit)
   alpha       PSE        ME       SME
0.050000  2.625000  6.747777 13.698960
```



```
> fit=lm(Y~ A+C+D+A*C+A*D+C*D+A*C*D, data)
> anova(fit)
Analysis of Variance Table
Response: Y
          Df  Sum Sq  Mean Sq  F value      Pr(>F)
A          1 1870.56  1870.56  83.3677  1.667e-05 ***
C          1  390.06   390.06  17.3844  0.0031244 **
D          1  855.56   855.56  38.1309  0.0002666 ***
A:C        1 1314.06  1314.06  58.5655  6.001e-05 ***
A:D        1 1105.56  1105.56  49.2730  0.0001105 ***
C:D        1    5.06     5.06   0.2256   0.6474830
A:C:D      1   10.56    10.56   0.4708   0.5120321
Residuals  8  179.50    22.44
—
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
> summary(fit)
Coefficients:
             Estimate  Std. Error  t value   Pr(>|t|)
 (Intercept)  70.0625     1.1842    59.164   7.40e-12 ***
 A1           10.8125     1.1842     9.131   1.67e-05 ***
 C1            4.9375     1.1842     4.169   0.003124 **
 D1            7.3125     1.1842     6.175   0.000267 ***
 A1:C1        -9.0625     1.1842    -7.653   6.00e-05 ***
 A1:D1         8.3125     1.1842     7.019   0.000110 ***
 C1:D1        -0.5625     1.1842    -0.475   0.647483
 A1:C1:D1     -0.8125     1.1842    -0.686   0.512032
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 4.737 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9687, Adjusted R-squared: 0.9413
F-statistic: 35.35 on 7 and 8 DF, p-value: 2.119e-05
```

Προσθήκη κεντρικών σημείων σε 2^k σχεδιασμό

Με τα 2 επίπεδα υπάρχει πιθανότητα να μην ισχύει η υπόθεση περί γραμμικότητας. Με την προσθήκη **κεντρικών σημείων** (center points) (n_C) σε ένα σχεδιασμό 2^2 υπάρχει προστασία ενάντια της καμπυλότητας καθώς επίσης και μία ανεξάρτητη εκτίμηση του πειραματικού σφάλματος.

Άθροισμα τετραγώνων για την καμπυλότητα:

$$SS_{Curvature} = \frac{n_F n_C(\bar{Y}_F - \bar{Y}_C)^2}{n_F + n_C}$$

Με την προσθήκη n_C, το μοντέλο είναι ως εξής:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \beta_{ij} x_i x_j$$

```
> datac=add.center(data, 4)
> datac
     A   B   C   D   Y
 1  -1  -1  -1  -1  45
 2   1  -1  -1  -1  71
 3  -1   1  -1  -1  48
 4   1   1  -1  -1  65
 5  -1  -1   1  -1  68
 6   1  -1   1  -1  60
 ...
 14  1  -1   1   1  86
 15 -1   1   1   1  70
 16  1   1   1   1  96
 17  0   0   0   0  NA
 18  0   0   0   0  NA
 19  0   0   0   0  NA
 20  0   0   0   0  NA
class=design, type= full factorial.center
```

```
> Y=c(45,71,48,65,68,60,80,65,43,100,45,104,75,86,70,96,73,
75,66,69)
> datac=add.response(datac, Y, replace=TRUE)
> datac
     A   B   C   D   Y
 1   -1  -1  -1  -1  45
 2   1   -1  -1  -1  71
 3   -1  1   -1  -1  48
 4   1   1   -1  -1  65
 5   -1  -1  1   -1  68
 6   1   -1  1   -1  60
 ...
 16  1   1   1   1   96
 17  0   0   0   0   73
 18  0   0   0   0   75
 19  0   0   0   0   66
 20  0   0   0   0   69
class=design, type= full factorial.center
```

```
> fit=lm(Y~(A+B+C+D)^4, datac)
> anova(fit)
          Df  Sum Sq  Mean Sq  F value    Pr(>F)
A          1 1870.56  1870.56 115.1115 0.001731 **
B          1   39.06    39.06   2.4038 0.218821
C          1  390.06   390.06  24.0038 0.016273 *
D          1  855.56   855.56  52.6500 0.005401 **
A:B        1    0.06     0.06   0.0038 0.954450
A:C        1 1314.06  1314.06  80.8654 0.002903 **
A:D        1 1105.56  1105.56  68.0346 0.003731 **
...
A:C:D      1   10.56    10.56   0.6500 0.479099
B:C:D      1   27.56    27.56   1.6962 0.283757
A:B:C:D    1    7.56     7.56   0.4654 0.544069
Residuals  4   50.26    12.57
```

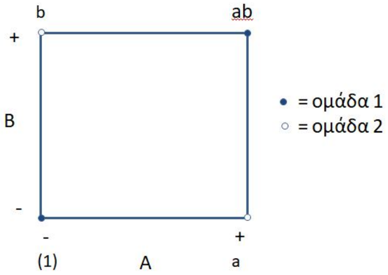
```
> library(alr3)
> pureErrorAnova(fit)
             Df   Sum Sq   Mean Sq    F value      Pr(>F)
A             1  1870.56   1870.56   115.1115  0.001731 **
B             1    39.06     39.06     2.4038    0.218821
C             1   390.06    390.06    24.0038   0.016273 *
D             1   855.56    855.56    52.6500  0.005401 **
A:B           1     0.06      0.06     0.0038    0.954450
A:C           1  1314.06   1314.06    80.8654  0.002903 **
A:D           1  1105.56   1105.56    68.0346  0.003731 **
...
A:C:D         1    10.56     10.56     0.6500    0.479099
B:C:D         1    27.56     27.56     1.6962    0.283757
A:B:C:D       1     7.56      7.56     0.4654    0.544069
Residuals     4    50.26     12.57
Lack of fit   1     1.51      1.51     0.0931    0.780243
Pure Error    3    48.75     16.25
```

Ανάμειξη πειραματικού σχεδιασμού 2^k

Η **ανάμειξη** (confounding) είναι μια τεχνική δημιουργίας παραγοντικών πειραμάτων μη πλήρων ομάδων.

Με την τεχνική αυτή κάποιες επιδράσεις (συνήθως αλληλεπιδράσεις υψηλής τάξης) δεν μπορούν να διαχωριστούν από την επίδραση των ομάδων, αλλά αναμειγνύονται με αυτές.

Με την ανάμειξη ένας παραγοντικός σχεδιασμός 2^k έχει 2^p μη πλήρεις ομάδες ($p<k$), με μέγεθος ομάδας 2^{k-p}, όπου για το σχηματισμό των ομάδων αναμειγνύονται p επιδράσεις - αλληλοεπιδράσεις. Κατά συνέπεια, αυτά τα σχέδια μπορούν να έχουν δύο ομάδες ($p=1$), τέσσερις ($p=2$), οκτώ ($p=3$) και ούτω καθεξής.



Σχήμα 5: Παραγοντικός σχεδιασμός 2^2 σε δύο μη πλήρεις ομάδες

Συνδιασμοί	I	A	B	AB	Ομάδα	Σύνολο
- -	+	-	-	+	1	(1)
+ -	+	+	-	-	2	a
- +	+	-	+	-	2	b
+ +	+	+	+	+	1	ab

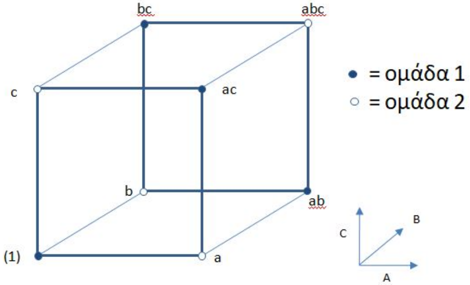


Figure 6: Παραγοντικός σχεδιασμός 2^3 σε δύο μη πλήρεις ομάδες

Συνδυασμός	Σύνολο	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	Ομάδα
- - -	(1)	+	-	-	+	-	+	+	-	1
+ - -	a	+	+	-	-	-	-	+	+	2
- + -	b	+	-	+	-	-	+	-	+	2
+ + -	ab	+	+	+	+	-	-	-	-	1
- - +	c	+	-	-	+	+	-	-	+	2
+ - +	ac	+	+	-	-	+	+	-	-	1
- + +	bc	+	-	+	-	+	-	+	-	1
+ + +	abc	+	+	+	+	+	+	+	+	2

Μία άλλη μέθοδος για τον σχηματισμό των ομάδων χρησιμοποιεί την ορίζουσα αντίθεση, η οποία δίνεται από το γραμμικό συνδυασμό:

$$L = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_k x_k$$

όπου: x_i, είναι το επίπεδο που εμφανίζεται ο i παράγοντας σε ένα συνδυασμό επεμβάσεων και a_i, ο εκθέτης που εμφανίζεται στον i παράγοντα στην επίδραση που έχει αναμειχθεί, το a_i παίρνει τιμές από 0 μέχρι $k-1$, όπου k ο αριθμός των παραγόντων.

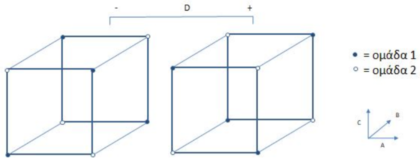
Για το 2^k το a θα παίρνει τιμές 0 ή 1 και το $x_i = 0$ (κατώτερο επίπεδο) ή $x_i = 1$ (ανώτερο επίπεδο). Οι συνδυασμοί επεμβάσεων που δίνουν την ίδια τιμή του L (modulo 2) κατατάσσονται στην ίδια ομάδα.

Στο παράδειγμα με το πειραματικό σχεδιασμό 2^3, θα αναμείξουμε την επίδραση ABC με τις ομάδες. Το x_1 θα αντιστοιχεί στο A, x_2 στο B και x_3 στο C και $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Επομένως η ορίζουσα είναι:

$$L = x_1 + x_2 + x_3$$

Ο συνδυασμός (1) γράφεται (0), (0), (0) στο σύστημα (0, 1) και συνεπώς: $L = 0 + 0 + 0 = 0 = 0 \ (mod 2)$

$$\begin{aligned}
a: &\quad L = 1 + 0 + 0 = 1 = 1 \ (mod 2) \\
b: &\quad L = 0 + 1 + 0 = 1 = 1 \ (mod 2) \\
ab: &\quad L = 1 + 1 + 0 = 2 = 0 \ (mod 2) \\
c: &\quad L = 0 + 0 + 1 = 1 = 1 \ (mod 2) \\
ac: &\quad L = 1 + 0 + 1 = 2 = 0 \ (mod 2) \\
bc: &\quad L = 0 + 1 + 1 = 2 = 0 \ (mod 2) \\
abc: &\quad L = 1 + 1 + 1 = 3 = 1 \ (mod 2)
\end{aligned}$$



Σχήμα 7: Παραγοντικός σχεδιασμός 2^4 σε δύο μη πλήρεις ομάδες

	A	B	C	D	ABCD	Blocks (ABCD)	Y
(1)	-1	-1	-1	-1	1	1	45
a	1	1	-1	-1	1	1	65
b	1	-1	1	-1	1	1	60
ab	-1	1	1	-1	1	1	80
c	1	-1	-1	1	1	1	100
ac	-1	1	-1	1	1	1	65
bc	-1	-1	1	1	1	1	45
abc	1	1	1	1	1	1	96
d	1	-1	-1	-1	-1	2	71
ad	-1	1	-1	-1	-1	2	48
bd	-1	-1	1	-1	-1	2	68
abd	1	1	1	-1	-1	2	65
cd	-1	-1	-1	1	-1	2	43
acd	1	1	-1	1	-1	2	104
bcd	1	-1	1	1	-1	2	86
abcd	-1	1	1	1	-1	2	70

Αλγόριθμός του Yates για το 2^4 σχεδιασμό

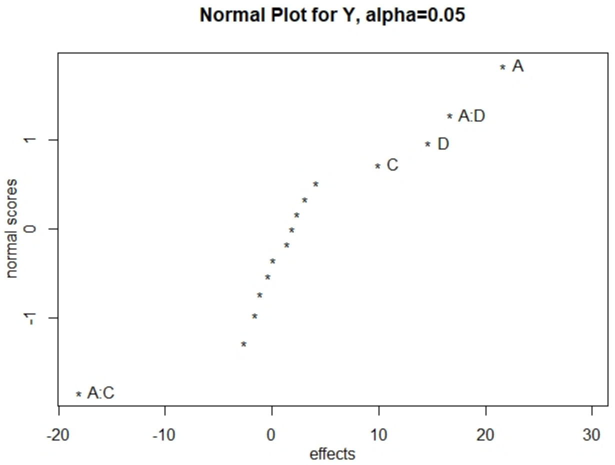
Επεμβάσεις	Y	(1)	(2)	(3)	(4)	Εκτίμηση Επιδράσεων $(4)/r2^{k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $(4)^2/r2^k$
(1)	45	116	229	502	1121		
a	71	113	273	619	173	21,63	1870,56
b	48	128	292	20	25	3,125	39,06
ab	65	145	327	153	1	0,125	0,06
c	68	143	43	14	79	9,875	390,06
ac	60	149	-23	11	-145	-18,13	1314,06
bc	80	161	116	-16	19	2,375	22,56
abc	65	166	37	17	15	1,875	14,06
d	43	26	-3	44	117	14,63	855,56
ad	100	17	17	35	133	16,63	1105,56
bd	45	-8	6	-66	-3	-0,375	0,56
abd	104	-15	5	-79	33	4,125	68,06
cd	75	57	-9	20	-9	-1,125	5,06
acd	86	59	-7	-1	-13	-1,625	10,56
bcd	70	11	2	2	-21	-2,625	27,56
abcd	96	26	15	13	11	1,375	7,56

```
> library(conf.design)
> design=conf.design(c(A = 1, B = 1, C = 1, D = 1), 2)
> design
     Blocks  A  B  C  D
1         0  0  0  0  0
2         0  1  1  0  0
3         0  1  0  1  0
4         0  0  1  1  0
5         0  1  0  0  1
6         0  0  1  0  1
...
12        1  1  1  1  0
13        1  0  0  0  1
14        1  1  1  0  1
15        1  1  0  1  1
16        1  0  1  1  1
```

```
> Y=c(45,65,60,80,100,45,75,96,71,48,68,65,43,104,86,70)
> data=cbind(design, Y)
> data
     Blocks  A  B  C  D    Y
1         0  0  0  0  0   45
2         0  1  1  0  0   65
3         0  1  0  1  0   60
4         0  0  1  1  0   80
5         0  1  0  0  1  100
6         0  0  1  0  1   45
...
12        1  1  1  1  0   65
13        1  0  0  0  1   43
14        1  1  1  0  1  104
15        1  1  0  1  1   86
16        1  0  1  1  1   70
```

```
> fit=aov(Y ~ (A+B+C+D)^4 + Error(Blocks), data)
> summary(fit)
Error: Blocks
           Df  Sum Sq  Mean Sq
 A:B:C:D    1   7.562    7.562
 Error: Within
           Df  Sum Sq  Mean Sq
 A          1  1870.6   1870.6
 B          1    39.1     39.1
 C          1   390.1    390.1
 D          1   855.6    855.6
 A:B        1     0.1      0.1
 A:C        1  1314.1   1314.1
 A:D        1  1105.6   1105.6
 ...
 A:C:D      1    10.6     10.6
 B:C:D      1    27.6     27.6
```

```
> fit=lm(Y~(A+B+C+D)^4 , data)
> DanielPlot(fit)
```



```
> fit=aov(Y ~ (A+B+C+D)^2 + Error(Blocks), data)
> summary(fit)
Error: Blocks
           Df  Sum Sq  Mean Sq  F value    Pr(>F)
 Residuals  1   7.562    7.562
 Error: Within
           Df  Sum Sq  Mean Sq  F value    Pr(>F)
 A          1  1870.6   1870.6   62.222  0.00140 **
 B          1    39.1     39.1    1.299  0.31795
 C          1   390.1    390.1   12.975  0.02272 *
 D          1   855.6    855.6   28.459  0.00595 **
 A:B        1     0.1      0.1    0.002  0.96582
 A:C        1  1314.1   1314.1   43.711  0.00271 **
 A:D        1  1105.6   1105.6   36.775  0.00373 **
 B:C        1    22.6     22.6    0.751  0.43518
 B:D        1     0.6      0.6    0.019  0.89781
 C:D        1     5.1      5.1    0.168  0.70257
 Residuals  4   120.2     30.1
```

Αριθμός Παραγόντων k	Αριθμός Ομάδων 2^p	Μέγεθος Ομάδας 2^{k-p}	Επιδράσεις που αναμειγνύονται p	Αλληλεπιδράσεις αναμεμειγμένες με τις ομάδες
3	2	4	ABC	ABC
	4	2	AB, AC	AB, AC, BC
4	2	8	ABCD	ABCD
	4	4	ABC, ACD	ABC, ACD, BD
	8	2	AB, BC, CD	AB, BC, CD, AC, BD, AD, ABCD
5	2	16	ABCDE	ABCDE
	4	8	ABC, CDE	ABC, CDE, ABDE
	8	4	ABE, BCE, CDE	ABE, BCE, CDE, AC, ABCD, BD, ADE
	16	2	AB, AC, CD, DE	All two- and four-factor interactions (15 effects)
6	2	32	ABCDEF	ABCDEF
	4	16	ABCF, CDEF	ABCF, CDEF, ABDE
	8	8	ABEF, ABCD, ACE	ABEF, ABCD, ACE, BCF, BDE, CDEF, ADF
	16	4	ABF, ACF, BDF, DEF	ABF, ACF, BDF, DEF, BC, ABCD, ABDE, AD, ACDE, CE, CDF, BCDEF, ABCEF, AEF, BE
	32	2	AB, BC, CD, DE, EF	All two-, four-, and six-factor interactions (31 effects)
7	2	64	ABCDEFG	ABCDEFG
	4	32	ABCFG, CDEFG	ABCFG, CDEFG, ABDE
	8	16	ABCD, CDEF, ADFG	ABC, DEF, AFG, ABCDEF, BCFG, ADEG, BCDEG
	16	8	ABCD, EFG, CDE,ADG	ABCD, EFG, CDE ,ADG, ABCDEFG, ABE,BCG, CDFG, ADEF, ACEG, ABFG, BCEF, BDEG, ACF, BDF
	32	4	ABG, BCG, CDG, DEG, EFG	ABG, BCG, CDG, AC, BD, CE, DF, AE, EG, EFG, BF, ABCD, ABDE, ABEF, BCDE, BCEF, CDEF, ABCDEFG, ADG, ACDEG, ACEFG, ABDFG, ABCEG, BEG, BDEFG, CFG, ADEF, ACDF, ABCF, AFG, BCDFG
	64	2	AB, BC, CD, DE, EF, FG	All two-, four-, and six-factor interactions (63 effects)

Παραγοντικός σχεδιασμός 2^k σε τέσσερις ομάδες

Σε ένα παραγοντικό σχεδιασμό 2^5, επιλέγουμε να δημιουργήσουμε τέσσερις μη πλήρεις ομάδες των οκτώ επεμβάσεων, με ανάμειξη των δύο επιδράσεων ADE και BCE. Οι ορίζουσες αντιθέσεις είναι:

$$L_1 = x_1 + x_4 + x_5$$
$$L_2 = x_2 + x_3 + x_5$$

Κάθε συνδυασμός θα δώσει μία ορισμένη δυάδα τιμών για την L_1 (modulo 2) και L_2 (modulo 2) δηλαδή $(L_1, L_2) =$ (0,0), (1,0), (0,1) και (1,1). Οι συνδυασμοί που δίνουν ίδιες τιμές τοποθετούνται στην ίδια ομάδα.

Ομάδα 1 $L_1 = 0, L_2 = 0$		Ομάδα 2 $L_1 = 1, L_2 = 0$		Ομάδα 3 $L_1 = 0, L_2 = 1$		Ομάδα 4 $L_1 = 1, L_2 = 1$	
(1)	abe	a	be	b	ae	e	abcde
ad	ace	d	abde	abd	de	ade	bd
bc	cde	abc	ce	c	abce	bce	ac
bcd	bde	bcd	acde	acd	bcde	ab	cd

Επαναλήψεις μη πλήρων ομάδων

Επανάληψη 1		Επανάληψη 2		Επανάληψη 3		Επανάληψη 4	
Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 1	Ομάδα 2
(1)	a	(1)	a	(1)	a	(1)	a
ab	b	ab	b	ab	b	ab	b
ac	c	ac	c	ac	c	ac	c
bc	abc	bc	abc	bc	abc	bc	abc

Πηγή παραλλακτικότητας	**ΒΕ**
Επαναλήψεις	3
Ομάδα (ABC)	1
Υπόλοιπο για ABC (ομάδες X επαναλήψεις)	3
A	1
B	1
C	1
AB	1
AC	1
BC	1
Υπόλοιπο (επαναλήψεις X επιδράσεις)	18
Σύνολο	31

Μερική ανάμειξη με τέσσερις επαναλήψεις σχεδίου 2^3

Επανάληψη I (ABC)		Επανάληψη II (AB)		Επανάληψη III (BC)		Επανάληψη IV (AC)	
Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 1	Ομάδα 2
(1)	a	(1)	a	(1)	b	(1)	a
ab	b	c	b	a	c	b	c
ac	c	ab	ac	bc	ab	ac	ab
bc	abc	abc	bc	abc	ac	abc	bc

Πηγή παραλλακτικότητας	**ΒΕ**
Επαναλήψεις	3
Ομάδα μέσα στις επαναλήψεις (ή ABC (επ. I), AB (επ. II), BC (επ. III), AC (επ. IV))	4
A	1
B	1
C	1
AB (από τις επαναλήψεις I, III, IV)	1
AC (από τις επαναλήψεις I, II, III)	1
BC (από τις επαναλήψεις I, II, IV)	1
ABC(από τις επαναλήψεις II, III, IV)	1
Υπόλοιπο	17
Σύνολο	31

Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί 2^k

Ο **κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός** (fractional factorial design) είναι ο σχεδιασμός στον οποίο εκτελείται μόνο ένα επιλεγμένο υποσύνολο ή κλάσμα των συνδυασμών των επεμβάσεων από ένα πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό. Τα κλασματικά παραγοντικά σχέδια είναι πολύ χρήσιμα όταν οι διαθέσιμοι πόροι είναι περιορισμένοι ή ο αριθμός των παραγόντων στο σχεδιασμό είναι αρκετά μεγάλος, επειδή απαιτούν λιγότερες εκτελέσεις σε σχέση με ένα πλήρες παραγοντικό. Οι κλασματικοί σχεδιασμοί εφαρμόζονται κυρίως σε πειράματα κρησαρίσματος.

$\frac{1}{2}$ κλάσμα 2^3 σχεδιασμού

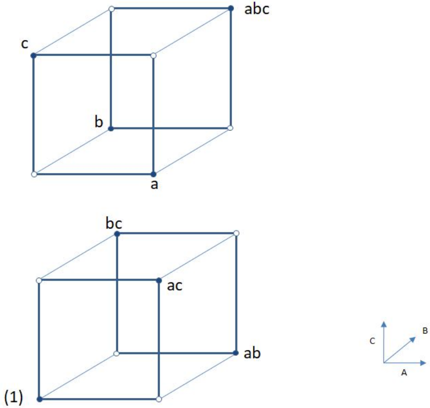
Επιλέγουμε την ομάδα με τους συνδυασμούς των επεμβάσεων οι οποίοι έχουν θετικό πρόσημο στη στήλη ABC. Η **ορίζουσα σχέση** (defining relation) είναι η I = ABC και ο **γεννήτορας** (generator) του κλάσματος ABC.

Συνδυασμοί επεμβάσεων		Παραγοντική επίδραση							
		I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
+ - -	a	+	+	-	-	-	-	+	+
- + -	b	+	-	+	-	-	+	-	+
- - +	c	+	-	-	+	+	-	-	+
+ + +	abc	+	+	+	+	+	+	+	+
- - -	(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
+ + -	ab	+	+	+	+	-	-	-	-
+ - +	ac	+	+	-	-	+	+	-	-
- + +	bc	+	-	+	-	+	-	+	-

Δύο κλάσματα σχεδιασμού 2^{3-1}

Κύριο κλάσμα
(I = ABC)

Εναλλακτικό
ή συμπληρωματικό
κλάσμα (I = - ABC)



Συνδυασμοί επεμβάσεων		Παραγοντική επίδραση							
		I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
+ - -	a	+	+	-	-	-	-	+	+
- + -	b	+	-	+	-	-	+	-	+
- - +	c	+	-	-	+	+	-	-	+
+ + +	abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Είναι αδύνατο να γίνει διαχωρισμός μεταξύ A και BC, B και AC, και C και AB. Όταν εκτιμάμε τα A, B και C στην πραγματικότητα εκτιμούμε τα A+BC, B+AC και C+AB. Δύο ή περισσότερα επιδράσεις που έχουν αυτή την ιδιότητα, ονομάζονται **ταυτόσημες** (aliases).

$$[A]: A + BC, \; [B]: B + AC \text{ και } [C]: C + AB.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε οποιαδήποτε στήλη με την ορίζουσα σχέση παίρνουμε τις ταυτόσημες με την επίδραση αυτή.

$$\text{π.χ. } A*I = A*ABC = A^2BC = BC$$

Συνδυασμοί επεμβάσεων		Παραγοντική επίδραση							
		I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
- - -	(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
+ + -	ab	+	+	+	+	-	-	-	-
+ - +	ac	+	+	-	-	+	+	-	-
- + +	bc	+	-	+	-	+	-	+	-

Αν επιλέξουμε το συμπληρωματικό κλάσμα με ορίζουσα σχέση I = - ABC, δηλαδή τους συνδυασμούς επεμβάσεων που σχετίζονται με το μείον στη στήλη ABC ((1), ab, ac και bc) τότε:

[A]': A - BC, [B]': B - AC και [C]': C AB.

Αν πολλαπλασιάσουμε οποιαδήποτε στήλη με την ορίζουσα σχέση παίρνουμε τις ταυτόσημες με την επίδραση αυτή.

π.χ. $A*I = A*(-ABC) = -A^2BC = -BC$

Διαχωριστική ικανότητα σχεδιασμού (design resolution)

Η διαχωριστική ικανότητα ή αναλυτική τάξη είναι μία σημαντική ιδιότητα ενός κλασματικού σχεδιασμού και περιγράφει το βαθμό στον οποίο οι κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις είναι ταυτόσημες μεταξύ τους.
Συνήθως χρησιμοποιούμε κλασματικούς σχεδιασμούς με την μεγαλύτερη δυνατή διαχωριστική ικανότητα. Η υψηλή διαχωριστική ικανότητα έχει λιγότερους περιορισμούς που απαιτούνται όσον αφορά ποιες αλληλεπιδράσεις είναι αμελητέες.

Διαχωριστική ικανότητα III. Σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση, αλλά οι κύριες επιδράσεις είναι ταυτόσημες με διπλές αλληλεπιδράσεις. Το μισό κλάσμα του σχεδιασμού 23 με τη ορίζουσα σχέση I= ABC, είναι ένα σχέδιο τάξης III (2^{3-1}_{III}).

Διαχωριστική ικανότητα IV. Σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση, ή με οποιαδήποτε διπλή αλληλεπίδραση, αλλά διπλές αλληλεπιδράσεις είναι ταυτόσημες με άλλες διπλές αλληλεπιδράσεις.

Διαχωριστική ικανότητα V. Σχεδιασμοί στους οποίους καμία κύρια επίδραση ή διπλές αλληλεπιδράσεις δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη κύρια επίδραση ή διπλές αλληλεπιδράσεις, αλλά διπλές αλληλεπιδράσεις είναι ταυτόσημες με αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων. κ.ο.κ

Παράγοντες k	Κλάσμα	Εκτελέσεις	Γεννήτορας	Παράγοντες k	Κλάσμα	Εκτελέσεις	Γεννήτορας	Παράγοντες k	Κλάσμα	Εκτελέσεις	Γεννήτορας
3	2^{3-1}_{III}	4	C =± AB				E =± ABC				L =± AC
4	2^{4-1}_{IV}	8	D =± ABC				F =± BCD				E =± ABC
	2^{5-1}_{V}	16	E =± ABCD		2^{9-5}_{III}	16	G =± ACD				F =± ABD
5	2^{5-2}_{III}	8	D =± AB				H =± ABD				G =± ACD
			E =± AC				J =± ABCD	12	$2^{12-}_{III}8$	16	H =± BCD
	2^{6-1}_{VI}	32	F =± ABCDE				H =± ABCG				J =± ABCD
	2^{6-2}_{IV}	16	E =± ABC		2^{10-3}_{V}	12	J =± BCDE				K =±AB
			F =± BCD				K =± ACDF				L =± AC
6			D =± AB				G =± BCDF				M=± AD
	$2^{6-}_{III}3$	8	E =± AC		2^{10-4}_{IV}	64	H =± ACDF				E =± ABC
			F =± BC				J =± ABDE				F =± ABD
	2^{7-1}_{VII}	64	G =± ABCDEF				K =± ABCE				G =±ACD
	2^{7-2}_{IV}	32	F =± ABCD	10			F =± ABCD				H =± BCD
			G =± ABDE				G =± ABC E	13	2^{13-9}_{III}	16	J =± ABCD
			E = ± ABC		2^{10-5}_{IV}	32	H =± ABDE				K = ±AB
7	2^{7-3}_{IV}	16	F = ± BCD				J =± ACDE				L =± AC
			G =± ACD				K =± BCDE				A=± AD
			D =±AB				E =± ABC				N =±BC
	$2_{II}I^{7-4}$	8	E =± AC				F =± BCD				E =± ABC
			F =± BC				G =± ACD				F =± ABD
			G =± ABC		2^{10-6}_{III}	16	H =± ABD				G =± ACD
	2^{8-2}_{V}	64	G = ± ABCD				J =± ABCD				H = ± BCD
			H =± ABEF				K =±AB	14	2^{14-10}_{III}	16	J =± ABCD
			F =± ABC				G=± CDE				K =±AB
	2^{8-3}_{IV}	32	G =± ABD				H=± ABCD				L =± AC
8			H =± BCDE	11	2^{11-5}_{IV}	64	J =± ABF				A=± AD
			E = ± BCD				K =± BDEF				N = ± BC
	2^{8-4}_{IV}	16	F =± ACD				L =± ADEF				O =±BD
			G =± ABC				F =± ABC				E =± ABC
			H =± ABD				G =± BCD				F =± ABD
	2^{9-2}_{VI}	128	H =± ACDFG		2^{11-6}_{IV}	32	H = ± CDE				G = ± ACD
			J = ± BCEFG				J =± ACD				H =± BCD
			G =± ABCD				K = ± ADE				J =± ABCD
	2^{9-3}_{IV}	64	H =± ACEF				L =± BDE	15	2^{15-11}_{III}	16	K =±AB
9			J =± CDEF				E =± ABC				L =± AC
			F = ± BCDE				F = ± BCD				M=± AD
	2^{9-4}_{IV}	32	G =± ACDE				G =± ACD				N =±BC
			H =± ABDE		2^{11-7}_{III}	16	H = ± ABD				O = ± BD
			J =± ABCE				J = ± ABCD				P =± CD
							K =±AB				

Κύριο $\frac{1}{2}$ κλάσμα 2^4 (2^{4-1}_{IV}) σχεδιασμού, με I = ABCD

	Βασικός συνδυασμός	Βασικό σχέδιο			D (=ABC)	I =ABCD	Τελική συνδυασμός	Y
		A	B	C				
1	(1)	-	-	-	-	+	(1)	45
2	a	+	-	-	+	+	ad	100
3	b	-	+	-	+	+	bd	45
4	ab	+	+	-	-	+	ab	65
5	c	-	-	+	+	+	cd	75
6	ac	+	-	+	-	+	ac	60
7	bc	-	+	+	-	+	bc	80
8	abc	+	+	+	+	+	abcd	96

Συμπληρωματικό $\frac{1}{2}$ κλάσμα 2^4 (2^{4-1}_{IV}) σχεδιασμού, με I = -ABCD

	Βασικοί συνδυασμοί	Βασικό σχέδιο			D (=-ABC)	I= -ABCD	Τελικοί συνδυασμοί	Y
		A	B	C				
1	(1)	-	-	-	+	-	d	43
2	a	+	-	-	-	-	a	71
3	b	-	+	-	-	-	b	48
4	ab	+	+	-	+	-	abd	104
5	c	-	-	+	-	-	c	68
6	ac	+	-	+	+	-	acd	86
7	bc	-	+	+	+	-	bcd	70
8	abc	+	+	+	-	-	abc	65

Αλγόριθμός του Yates για τον κύριο 2_{IV}^{4-1} σχεδιασμό

Συνδυασμοί επεμβάσεων	Y	1	2	3	Επίδραση	Εκτίμηση Επίδρασης $2*(3)/r^{2k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $2*(3)^2/r^{2k}$
(1)	45	145	255	566	-		
a(d)	100	110	311	76	A + BCD	19	722
b(d)	45	135	75	6	B + ACD	1,5	4,5
ab	65	176	1	-4	AB + CD	-1	2
c(d)	75	55	-35	56	C + ABD	14	392
ac	60	20	41	-74	AC + BD	-18,5	684,5
bc	80	-15	-35	76	BC + AD	19	722
abc(d)	96	16	31	66	ABC + D	16,5	544,5

Αλγόριθμός του Yates για τον συμπληρωματικό 2_{IV}^{4-1} σχεδιασμό

Συνδυασμοί επεμβάσεων	Y	1	2	3	Επιδράσεις	Εκτίμηση Επίδρασης $2*(3)/r^{2k-1}$	Άθροισμα Τετραγώνων $2*(3)^2/r^{2k}$
(d)	43	114	266	555	-		
a	71	152	289	97	A - BCD	24,25	1176,125
b	48	154	84	19	B - ACD	4,75	45,125
ab(d)	104	135	13	5	AB - CD	1,25	3,125
c	68	28	38	23	C - ABD	5,75	66,125
ac(d)	86	56	-19	-71	AC - BD	-17,75	630,125
bc(d)	70	18	28	-57	BC - AD	-14,25	406,125
abc	65	-5	-23	-51	ABC - D	-12,75	325,125

2^{4-1}_{IV}, (I=ABCD)		2^{4-1}_{IV}, (I= -ABCD)		2^3 με ανάμειξη (ABCD)			
[i]	Εκτίμηση	[i]'	Εκτίμηση	$\frac{1}{2}$([i] + [i]')		$\frac{1}{2}$([i] - [i]')	
A + BCD	19	A - BCD	24,25	A	21,625	BCD	-2,625
B + ACD	1,5	B - ACD	4,75	B	3,125	ACD	-1,625
AB + CD	-1	AB - CD	1,25	AB	0,125	CD	-1,125
C + ABD	14	C - ABD	5,75	C	9,875	ABD	4,125
AC + BD	-18,5	AC - BD	-17,8	AC	-18,125	BD	-0,375
BC + AD	19	BC - AD	-14,3	BC	2,375	AD	16,625
ABC + D	16,5	ABC - D	-12,75	ABC	1,875	D	14,625

Παράδειγμα 4.

Μελετήθηκε η επίδραση πέντε παραγόντων σε δύο επίπεδα σε σχέδιο 2^{5-1} (ρύθμιση διαφράγματος - A, χρόνος έκθεσης - B, ανάπτυξη χρόνου - C, διάσταση μάσκας - D και χρόνος χαλκογραφησης - E), στην απόδοση μιας διαδικασίας κατασκευής κυκλωμάτων.

$\frac{1}{2}$ κλάσμα 2^5 (2^{5-1}_{V}) σχεδιασμού, με I = ABCDE

	Βασικοί συνδυασμοί	Βασικό σχέδιο				E = ABCD	ABCDE	Τελικοί συνδυασμοί	Y
		A	B	C	D				
1	(1)	-	-	-	-	+	+	e	8
2	a	+	-	-	-	-	+	a	9
3	b	-	+	-	-	-	+	b	34
4	ab	+	+	-	-	+	+	abe	52
5	c	-	-	+	-	-	+	c	16
6	ac	+	-	+	-	+	+	ace	22
7	bc	-	+	+	-	+	+	bce	45
8	abc	+	+	+	-	-	+	abc	60
9	d	-	-	-	+	-	+	d	6
10	ad	+	-	-	+	+	+	ade	10
11	bd	-	+	-	+	+	+	bde	30
12	abd	+	+	-	+	-	+	abd	50
13	cd	-	-	+	+	+	+	cde	15
14	acd	+	-	+	+	-	+	acd	21
15	bcd	-	+	+	+	-	+	bcd	44
16	abcd	+	+	+	+	+	+	abcde	63

Αλγόριθμός του Yates για το 2_V^{5-1} σχεδιασμό

Συνδυασμοί επεμβάσεων	Y	**(1)**	(2)	(3)	(4)	Εκτίμηση Επίδρασης 2*(4)/r2k-1	Άθροισμα Τετραγώνων 2*(4)2/r2k	Επιδράσεις
(e)	8	17	103	246	485			
a	9	86	143	239	89	11,125	495,06	A + BCDE
b	34	38	96	40	271	33,875	4590,06	B + ACDE
ab(e)	52	105	143	49	55	6,875	189,06	AB + CDE
c	16	16	19	136	87	10,875	473,06	C + ABDE
ac(e)	22	80	21	135	3	0,375	0,56	AC + BDE
bc(e)	45	36	24	26	5	0,625	1,56	BC + ADE
abc	60	107	25	29	-11	-1,375	7,56	ABC + DE
d	6	1	69	40	-7	-0,875	3,06	D + ABCE
ad(e)	10	18	67	47	9	1,125	5,06	AD + BCE
bd(e)	30	6	64	2	-1	-0,125	0,06	BD + ACE
abd	50	15	71	1	3	0,375	0,56	ABD + CE
cd(e)	15	4	17	-2	7	0,875	3,06	CD + ABE
acd	21	20	9	7	-1	-0,125	0,06	ACD + BE
bcd	44	6	16	-8	9	1,125	5,06	BCD + AE
abcd(e)	63	19	13	-3	5	0,625	1,56	ABCD + E

```
> design = FrF2(nfactors=5, resolution=5, randomize = F)
> design = FrF2(16, generators = "ABCD", randomize = F)
> summary(design)
$generators [1] E=ABCD
Alias structure: [[1]] [1] no aliasing among main effects and 2fis
        A    B    C    D    E
 1     -1   -1   -1   -1    1
 2      1   -1   -1   -1   -1
 3     -1    1   -1   -1   -1
 4      1    1   -1   -1    1
 5     -1   -1    1   -1   -1
 6      1   -1    1   -1    1
 ...
 12     1    1   -1    1   -1
 13    -1   -1    1    1    1
 14     1   -1    1    1   -1
 15    -1    1    1    1   -1
 16     1    1    1    1    1
```

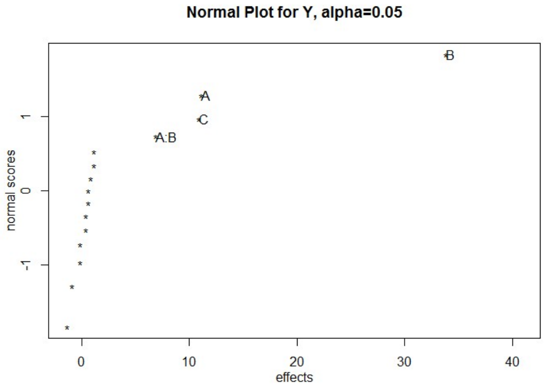
```
> Y=c(8,9,34,52,16,22,45,60,6,10,30,50,15,21,44,63)
> data=cbind(design, Y)
> data
      A   B   C   D   E   8
 1   -1  -1  -1  -1   1   9
 2    1  -1  -1  -1  -1  34
 3   -1   1  -1  -1  -1  52
 4    1   1  -1  -1   1  16
 5   -1  -1   1  -1  -1  22
 6    1  -1   1  -1   1  45
 ...
 12   1   1  -1   1  -1  50
 13  -1  -1   1   1   1  15
 14   1  -1   1   1  -1  21
 15  -1   1   1   1  -1  44
 16   1   1   1   1   1  63
```

```
> fit=lm(Y~(A+B+C+D+E)^4, data=data)
> aliases(fit)
A = B:C:D:E
B = A:C:D:E
C = A:B:D:E
D = A:B:C:E
E = A:B:C:D
A:B = C:D:E
A:C = B:D:E
A:D = B:C:E
A:E = B:C:D
B:C = A:D:E
B:D = A:C:E
B:E = A:C:D
C:D = A:B:E
C:E = A:B:D
D:E = A:B:C
```

```
> fit=lm(Y~(A+B+C+D+E)^2 , data=data)
> summary(fit)
...
Coefficients:
             Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
 (Intercept)  30.3125     NA         NA       NA
 A1            5.5625     NA         NA       NA
 B1           16.9375     NA         NA       NA
 C1            5.4375     NA         NA       NA
 D1           -0.4375     NA         NA       NA
 E1            0.3125     NA         NA       NA
 A1:B1         3.4375     NA         NA       NA
 A1:C1         0.1875     NA         NA       NA
 A1:D1         0.5625     NA         NA       NA
 A1:E1         0.5625     NA         NA       NA
 B1:C1         0.3125     NA         NA       NA
 B1:D1        -0.0625     NA         NA       NA
 ...
```

```
> anova(fit)
           Df   Sum Sq   Mean Sq   F value   Pr(>F)
A           1    495.1     495.1
B           1   4590.1    4590.1
C           1    473.1     473.1
D           1      3.1       3.1
E           1      1.6       1.6
A:B         1    189.1     189.1
A:C         1      0.6       0.6
A:D         1      5.1       5.1
A:E         1      5.1       5.1
B:C         1      1.6       1.6
B:D         1      0.1       0.1
B:E         1      0.1       0.1
C:D         1      3.1       3.1
C:E         1      0.6       0.6
D:E         1      7.6       7.6
Residuals   0      0.0
```

> DanielPlot(fit)



```
> fit=lm(Y~A+B+C+A*B, data=data)
> anova(fit)
Analysis of Variance Table
Response: Y
           Df  Sum Sq  Mean Sq  F value   Pr(>F)
 A          1   495.1    495.1   193.195  2.535e-08 ***
 B          1  4590.1   4590.1  1791.244  1.560e-13 ***
 C          1   473.1    473.1   184.610  3.214e-08 ***
 A:B        1   189.1    189.1    73.781  3.302e-06 ***
 Residuals 11    28.2      2.6
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Παράδειγμα 6.

Μελετήθηκε η επίδραση έξι παραγόντων σε δύο επίπεδα σε σχέδιο 2^{6-2} (θερμοκρασία καλουπιού (A), ταχύτητα βίδας (B), χρόνος συγκράτησης (C), χρόνος κύκλου (D), πύλη μέγεθος (E) και πίεση συγκράτησης (F)), στην συρρίκνωση κατά την διαδικασία χύτευσης.

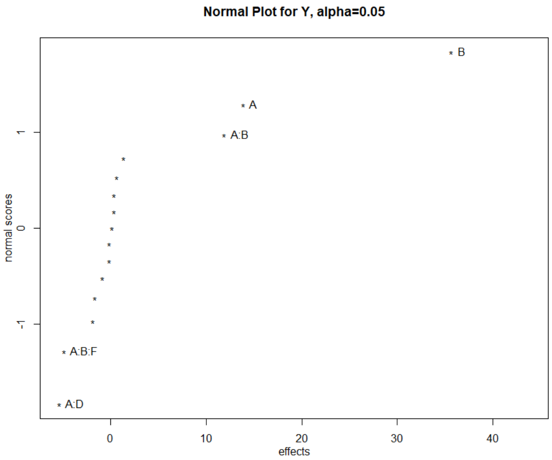
$\frac{1}{4}$ κλάσμα 2^6 (2^{6-2}_{IV}) σχεδιασμού, με I=ABCE και I=BCDF

	A	B	C	D	$E(=ABC)$	$F(=BCD)$	Y	
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	6	(1)
2	1	-1	-1	-1	1	-1	10	ae
3	-1	1	-1	-1	1	1	32	def
4	1	1	-1	-1	-1	1	60	abf
5	-1	-1	1	-1	1	1	4	cef
6	1	-1	1	-1	-1	1	15	acf
7	-1	1	1	-1	-1	-1	26	bc
8	1	1	1	-1	1	-1	60	abce
9	-1	-1	-1	1	-1	1	8	df
10	1	-1	-1	1	1	1	12	adef
11	-1	1	-1	1	1	-1	34	bde
12	1	1	-1	1	-1	-1	60	abd
13	-1	-1	1	1	1	-1	16	cde
14	1	-1	1	1	-1	-1	5	acd
15	-1	1	1	1	-1	1	37	bcdf
16	1	1	1	1	1	1	52	abcdef

```
> design=FrF2(16,generators=c("ABC","BCD"),randomize=F)
> Y=c(6,10,32,60,4,15,26,60,8,12,34,60,16,5,37,52)
> data=cbind(design,Y)
> fit=lm(Y~(A+B+C+D+E+F)^6, data=data)
> summary(fit)
```

```
> aliases(fit)
A = B:C:E = D:E:F = A:B:C:D:F
B = A:C:E = C:D:F = A:B:D:E:F
C = B:D:F = A:C:D:E:F = A:B:E
D = A:E:F = B:C:F = A:B:C:D:E
E = A:D:F = B:C:D:E:F = A:B:C
F = A:D:E = B:C:D = A:B:C:E:F
A:B = A:C:D:F = B:D:E:F = C:E
A:C = A:B:D:F = C:D:E:F = B:E
A:D = A:B:C:F = B:C:D:E = E:F
A:E = B:C = D:F
A:F = A:B:C:D = B:C:E:F = D:E
B:D = A:B:E:F = A:C:D:E = C:F
B:F = A:B:D:E = A:C:E:F = C:D
A:B:D = A:C:F = B:E:F = C:D:E
A:B:F = A:C:D = B:D:E = C:E:F
```

> DanielPlot(fit)



```
> fit=lm(Y~(A+B)^2, data=data)
> summary(fit)
Call: lm.default(formula = Y ~ (A + B)^2, data = data)
Residuals:
   Min      1Q   Median     3Q    Max
 -6.250  -3.000   0.625   2.000  7.500
Coefficients:
              Estimate  Std. Error  t value   Pr(>|t|)
 (Intercept)   27.312     1.138     23.996   1.65e-11 ***
 A1             6.938     1.138      6.095   5.38e-05 ***
 B1            17.812     1.138     15.649   2.39e-09 ***
 A1:B1          5.938     1.138      5.216   0.000216 ***
— Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 4.553 on 12 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9626, Adjusted R-squared: 0.9533
F-statistic: 103.1 on 3 and 12 DF, p-value: 7.837e-09
```

Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί σε ομάδες

Όταν ένας κλασματικός σχεδιασμός απαιτεί πολλές εκτελέσεις που δεν μπορούν να γίνουν σε ομοιογενείς συνθήκες, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τεχνική της ανάμειξης.
Σε ένα κλασματικό σχεδιασμό 2^{6-2}_{IV} με ορίζουσες σχέσεις I = ABCE = BCDF = ADEF (γεννήτορες E = ABC και F = BCD), δημιουργούμε δύο ομάδες των οκτώ συνδυασμών, με την ανάμειξη μία από τις επιδράσεις ABD, CDE, ACF και BEF.

Ομάδα 1	Ομάδα 2
(1)	ae
abf	acf
cef	bef
abce	bc
adef	df
bde	abd
acd	cde
bcdf	abcdef

Σχεδιασμός Plackett–Burman

Οι σχεδιασμοί Plackett-Burman είναι μία ειδική κατηγορία ορθογώνιων σχεδιασμών που εξετάζουν $k = N - 1$ παράγοντες σε N εκτελέσεις. Δημιουργούν σχεδιασμούς με αριθμό εκτελέσεων ενδιάμεσους από αυτούς που σχηματίζονται με τους κλασματικούς σχεδιασμούς.

Ο αριθμός των εκτελέσεων είναι πολλαπλάσιο του 4 (12, 20, 24, 28, 36,...) και αναφέρονται ως **μη-γεωμετρικοί σχεδιασμοί** (nongeometric designs). Αν το N είναι δύναμη του 2 (π.χ. 8, 16, 32, 64) οι σχεδιασμοί είναι ταυτόσημοι με τους 2^{k-p} κλασματικούς παραγοντικούς σχεδιασμούς.

Οι σχεδιασμοί Plackett-Burman έχουν σύνθετες ταυτόσημες επιδράσεις. Για παράδειγμα στο N=12, κάθε κύρια επίδραση είναι μερικώς ταυτόσημη με όλες τις διπλές αλληλεπιδράσεις.

N = 12	+	+	-	+	+	+	-	-	-	+	-																						
N = 20	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-															
N = 24	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	-	-	-	-											
N = 36	-	+	-	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-

N = 12, k = 11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+
2	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-
3	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+
4	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+
5	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+
6	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-
7	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-
8	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-
9	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+
10	+	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-
11	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+	+
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

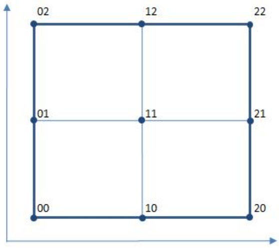
```
> pb(12,randomize=FALSE)
    A  B  C  D  E  F  G  H  J  K  L
1   1  1 -1  1  1  1 -1 -1 -1  1 -1
2  -1  1  1 -1  1  1  1 -1 -1 -1  1
3   1 -1  1  1 -1  1  1  1 -1 -1 -1
4  -1  1 -1  1  1 -1  1  1  1 -1 -1
5  -1 -1  1 -1  1  1 -1  1  1  1 -1
6  -1 -1 -1  1 -1  1  1 -1  1  1  1
7   1 -1 -1 -1  1 -1  1  1 -1  1  1
8   1  1 -1 -1 -1  1 -1  1  1 -1  1
9   1  1  1 -1 -1 -1  1 -1  1  1 -1
10 -1  1  1  1 -1 -1 -1  1 -1  1  1
11  1 -1  1  1  1 -1 -1 -1  1 -1  1
12 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
class=design, type= pb
```

```
> Y=rnorm(12)
> design=pb(12,randomize=FALSE)
> data=cbind(design,Y)
> fit=lm(Y (A+B+C+D+E+F+G+H+J+K+L)^2,data)
> alias(fit)
Model :
Y~ (A+B+C+D+E+F+G+H+J+K+L)^2
Complete :
        (Intercept)  A1   B1    C1    D1    E1    F1   ...
 A1:B1       0       0    0    -1/3  -1/3  -1/3   1/3  ...
 A1:C1       0       0   -1/3   0     1/3  -1/3  -1/3  ...
 A1:D1       0       0   -1/3   1/3   0     1/3   1/3  ...
 A1:E1       0       0   -1/3  -1/3   1/3   0    -1/3  ...
 A1:F1       0       0    1/3  -1/3   1/3  -1/3   0    ...
 A1:G1       0       0   -1/3   1/3  -1/3  -1/3  -1/3  ...
   ...
```

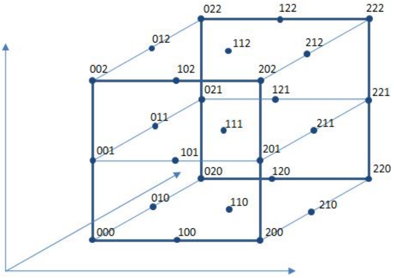
3^k Παραγοντικοί σχεδιασμοί

Οι σχεδιασμοί 3^k είναι μία κατηγορία παραγοντικών σχεδιασμών όπου κάθε παράγοντας έχει τρία επίπεδα. Τα επίπεδα μπορούν να κωδικοποιηθούν ως -1 (χαμηλό επίπεδο), 0 (μεσαίο επίπεδο) και +1 (υψηλό επίπεδο) ή ως 0, 1 και 2.
Οι σχεδιασμοί 3^k χρησιμοποιούνται κυρίως όταν μας ενδιαφέρει η επίδραση της καμπυλότητας ενός ποσοτικού παράγοντα στη συνάρτηση απόκρισης. Η προσθήκη του τρίτου επιπέδου επιτρέπει η σχέση μεταξύ της απόκρισης και κάθε παράγοντα να περιγράφεται από ένα μοντέλο δεύτερης τάξης.

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \beta_{ij} x_i x_j$$



3^2 σχεδιασμός, 9 εκτελέσεις



3^3 σχεδιασμός, 27 εκτελέσεις

Ο σχεδιασμός 3^k δεν είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για αποδώσουμε το μοντέλο δεύτερης τάξης, όπου τα σχέδια επιφανειακής απόκρισης υπερτερούν, ενώ οι σχεδιασμοί 2^k με την προσθήκη κεντρικών σημείων παρέχουν μια καλή ένδειξη της καμπυλότητας και επιτρέπουν να διατηρηθεί το μέγεθος και η πολυπλοκότητα του σχεδιασμού σε χαμηλό επίπεδο.

Αν οι παράγοντες είναι ποσοτικοί και τα επίπεδα ισαπέχουν, οι κύριες επιδράσεις μπορούν να διαχωριστούν σε 2 συνιστώσες, μία γραμμική (L) και μία τετραγωνική (Q), με ένα βαθμό ελευθερίας η καθεμία.

Συντελεστές ορθογώνιων αντιθέσεων	
Γραμμικός (L)	Τετραγωνικός (Q)
-1	1
0	-2
1	1

Οι αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων επίσης διαχωρίζονται στις LxL, LxQ, QxL και QxQ συνιστώσες τους, με έναν βαθμό ελευθερίας η καθεμία.
Επιπλέον η αλληλεπίδραση δύο παραγόντων μπορεί επίσης να διαχωριστεί σε 2 συνιστώσες (AB και AB^2) με 2 βαθμούς ελευθερίας η καθεμία, οι οποίες δεν έχουν πραγματική σημασία, αλλά χρησιμοποιούνται στην κατασκευή άλλων σχεδιασμών.

Παραγοντικός σχεδιασμός 3k με ανάμειξη

Στον 3^kσχεδιασμό μπορεί να σχηματιστούν με ανάμειξη 3^p μη πλήρεις ομάδες (τρεις, εννέα, ...), όπου p<k. Για τον σχηματισμό των ομάδων αναμειγνύονται οι συνιστώσες των αλληλοεπιδράσεων.
Η βασική αντίθεση L είναι η εξής:

$$L = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_k x_k$$

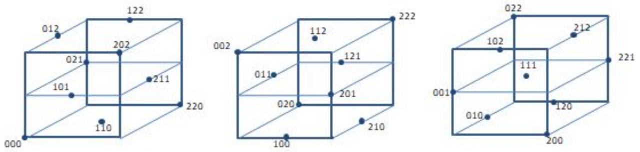
όπου α_i παριστάνει τον εκθέτη του i παράγοντα στην επίδραση που είναι αναμειγμένος και x_i είναι το επίπεδο του i παράγοντα στον συγκεκριμένο συνδυασμό επεμβάσεων. Το a_i παίρνει τιμές 0, 1 και 2, εκτός πρώτο μη μηδενικό a_i που είναι 1 και το x_i παίρνει τιμές 0, 1 και 2. Οι συνδυασμοί των επεμβάσεων τοποθετούνται στις ομάδες με βάση τις τιμές των βασικών αντιθέσεων L (modulo 3).

Κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός 3^k

Στους 3^k σχεδιασμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα $(1/3)^p$ κλάσμα, όπου p<k, το οποίο θα έχει 3^{k-p} συνδυασμούς επεμβάσεων. Αρχικά επιλέγουμε τις p συνιστώσες, τοποθετούμε τους συνδυασμούς σε 3^p μη πλήρεις ομάδες και εκτελούμε την ομάδα που επιλέγουμε. Αν $B^{\alpha 2}C^{\alpha 3}\ldots K^{\alpha k}$ είναι η συνιστώσα της αλληλεπίδρασης που χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία των ομάδων, τότε η $I = AB^{\alpha 2}C^{\alpha 3}\ldots K^{\alpha k}$ είναι η ορίζουσα σχέση του κλασματικού σχεδιασμού. Οι ταυτόσημες επιδράσεις - αλληλοεπιδράσεις παράγονται με τον πολλαπλασιασμό της επίδρασης με I και I^2 (modulo 3).

Ένα-τρίτο κλάσματα σχεδιασμού 3^3 με $I = AB^2C^2$

1ο κλάσμα	2ο κλάσμα	3ο κλάσμα
000	100	200
012	112	212
101	201	001
202	002	102
021	121	221
110	210	010
122	222	022
211	011	111
220	020	120



Κατασκευή σχεδιασμού 3^2

```
> library(DoE.base)
> data=fac.design(3, 2, replications=2,randomize=F)
creating full factorial with 9 runs ...
> data
   run.no  run.no.std.rp  A  B  Blocks
 1      1            1.1  1  1      .1
 2      2            2.1  2  1      .1
 3      3            3.1  3  1      .1
 4      4            4.1  1  2      .1
 5      5            5.1  2  2      .1
 6      6            6.1  3  2      .1
 ...
```

```
> Y=c(-2,0,-1,-3,1,5,2,4,0,-1,2,0,0,3,6,3,6,-1)
> data=add.response(data, Y)
> data
   run.no  run.no.std.rp  A  B  Blocks
 1      1            1.1  1  1      .1  -2
 2      2            2.1  2  1      .1   0
 3      3            3.1  3  1      .1  -1
 4      4            4.1  1  2      .1  -3
 5      5            5.1  2  2      .1   1
 6      6            6.1  3  2      .1   5
 ...
```

Σχεδιασμός 3^2 σε τρεις ομάδες με ανάμειξη AB^2

```
> design=conf.design(c(A = 1, B = 2), 3)
> design
  Blocks A B
1      0 0 0
2      0 1 1
3      0 2 2
4      1 1 0
...
```

```
> design=conf.design(c(A = 1, B = 2, C = 2), 3)
> design
     Blocks  A  B  C
  1       0  0  0  0
  2       0  1  1  0
  3       0  2  2  0
  4       0  1  0  1
 ...
```

1/3 **κλάσμα σχεδιασμού** 3^3

```
> fract.design=design[c(19:27),]
> fract.design
     Blocks  A  B  C
19      2    2  0  0
20      2    0  1  0
21      2    1  2  0
22      2    0  0  1
23      2    1  1  1
24      2    2  2  1
25      2    1  0  2
26      2    2  1  2
27      2    0  2  2
...
```

Βιβλιογραφία

- Kuehl, R. (2000). *Design of experiments: statistical principles of research design and analysis*, 2nd ed. Pacific Grove (Calif.): Duxbury press.
- Montgomery, D. C. (2012). *Design and analysis of experiments*, 8th ed. Hoboken (N.J.): Wiley.